

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค22101 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 การแปลงทางเรขาคณิต

เรื่อง การหมุน (1)

ครูผู้สอน ครุณรงค์ สุขใส





การหมั่น (1)





จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

- 1) บอกความหมายและสมบัติของการหมุนบนระนาบ
- 2) หาภาพที่ได้จากการหมุนรูปต้นแบบ







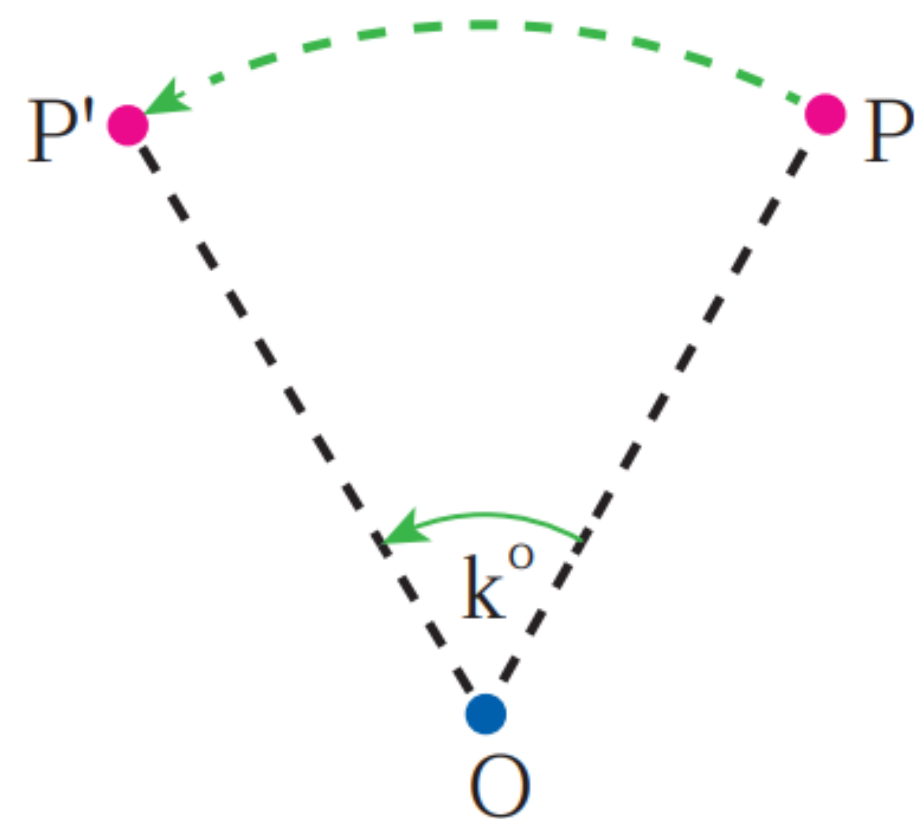




การหมุนเหล่านี้เป็นตัวอย่างของ
การเคลื่อนที่รอบจุด ๆ หนึ่ง
ซึ่งอาจมีทิศทางตามเข็มนาฬิกาหรือ
ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

การหมุนบนระนาบ

การหมุนบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิต
ที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่งเป็น **จุดหมุน** หรือ **จุดศูนย์กลาง**
ของการหมุน แต่ละจุด P บนระนาบ มีจุด P' เป็นจุด
ที่สมนัยกับจุด P และเป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P
รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนด ด้วยมุมที่มีขนาด k
องศา โดยที่ $OP = OP'$





กิจกรรม

สำรวจการหมุน





กิจกรรมสำรวจการหมุน





กิจกรรมสำรวจการหมุน





กิจกรรมสำรวจการหมุน

1) ให้นักเรียนจับคู่ แล้วรับกระดาษ
รูปต้นแบบซึ่งเป็นรูปคล้ายธง
คู่ละ 1 ชิ้น



กิจกรรมสำรวจการหมุน

2) ให้นักเรียนวางกระดาษ
รูปต้นแบบบนกระดาษ A4
แล้วใช้ดินสอลากไปตามขอบของ
รูปสามเหลี่ยมที่เจาะไว้ตรงกลาง
ผืนธง พร้อมทั้งเขียนชื่อจุดยอด A,
B และ C ตามกระดาษรูปต้นแบบ



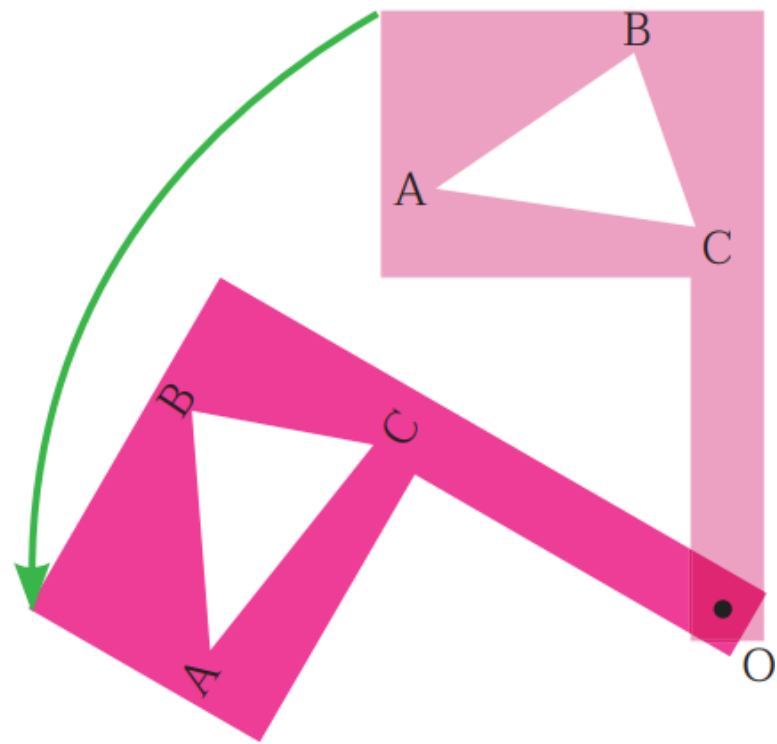
กิจกรรมสำรวจการหมุน

2) ให้รูปสามเหลี่ยมที่ได้นี้เป็น
รูปต้นแบบ แล้วปักปลายดินสอดำในรู
ที่ด้านตรงจุด O และกดดินสอดำไว้
เพื่อไม่ให้ปลายดินสอดำเคลื่อนที่
ให้จุดนี้เป็นจุดหมุน จากนั้น หมุนธง
ทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุมขนาดหนึ่ง



กิจกรรมสำรวจการหมุน

2) หมุนρθทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม
ขนาดหนึ่ง ดังรูป





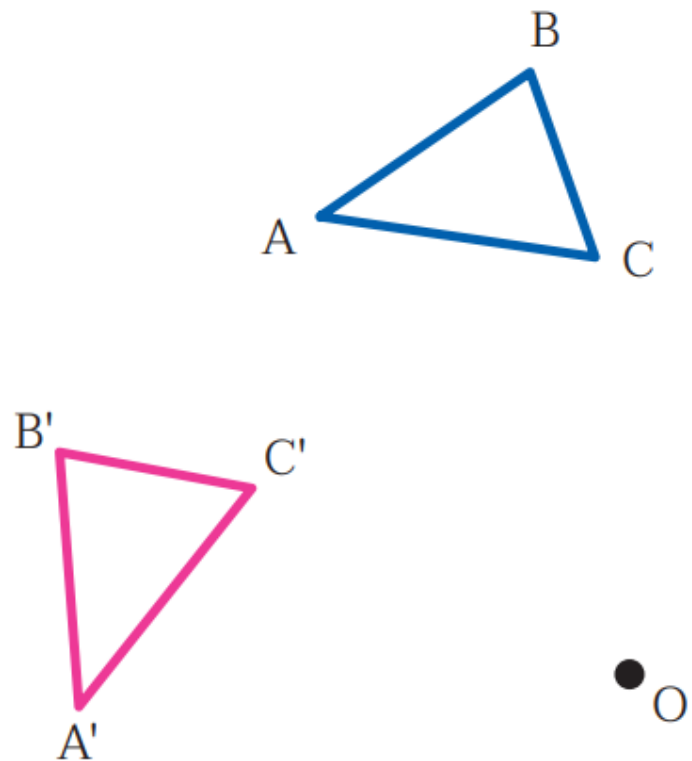
กิจกรรมสำรวจการหมุน

3) ใช้ดินสอวาดรูปสามเหลี่ยม
ในธงอีกครั้ง ให้รูปสามเหลี่ยมนี้
เป็นภาพที่ได้จากการหมุน
จากนั้น เขียนชื่อจุดยอด A' , B'
และ C' ดังรูป



กิจกรรมสำรวจการหมุน

3) จากนั้น เขียนชื่อจุดยอด A' , B' และ C' ดังรูป





กิจกรรมสำรวจการหมุน

ให้นักเรียนสังเกตว่ารูปต้นแบบและ
ภาพที่ได้จากการหมุนสามารถทับกัน
สนิทหรือไม่ เพราะเหตุใด

ทับกันสนิท

เพราะสร้างมาจากรูปเดียวกัน



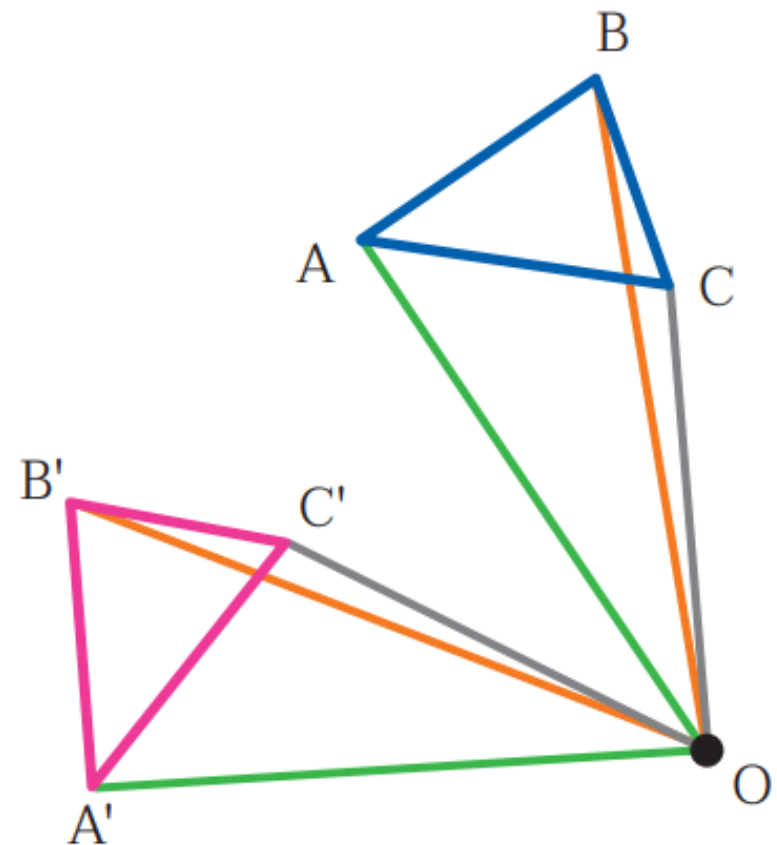
กิจกรรมสำรวจการหมุน

4) ลาก \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} และ
 $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$



กิจกรรมสำรวจการหมุน

4) จากนั้นวัดความยาวของ
ส่วนของเส้นตรงเหล่านั้น ดังรูป





กิจกรรมสำรวจการหมุน

ส่วนของเส้นตรงใดบ้าง
ที่ยาวเท่ากัน

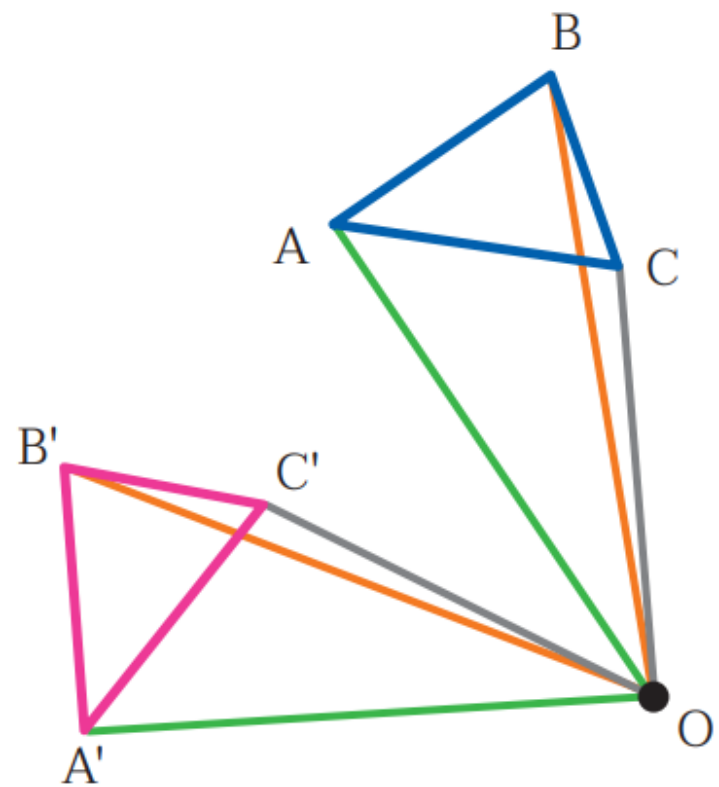
$$OA = OA', OB = OB'$$

และ $OC = OC'$



กิจกรรมสำรวจการหมุน

5) ให้นักเรียนวัดขนาดของ $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$ และ $\widehat{COC'}$





กิจกรรมสำรวจการหมุน

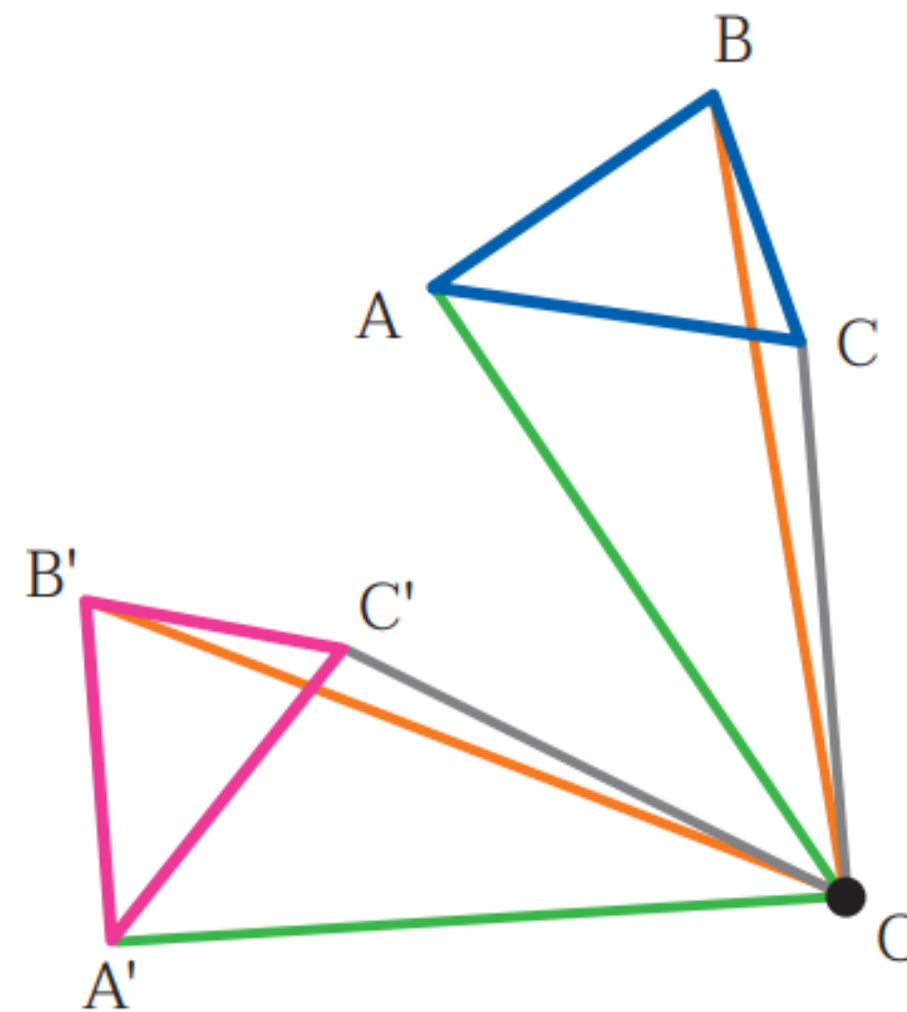
ให้นักเรียนสังเกต
ขนาดของมุมทั้งสาม

มุมทั้งสามมีขนาดเท่ากัน



สมบัติของการหมุน

1) รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนสามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูปหรือกล่าวได้ว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนเท่ากันทุกประการ

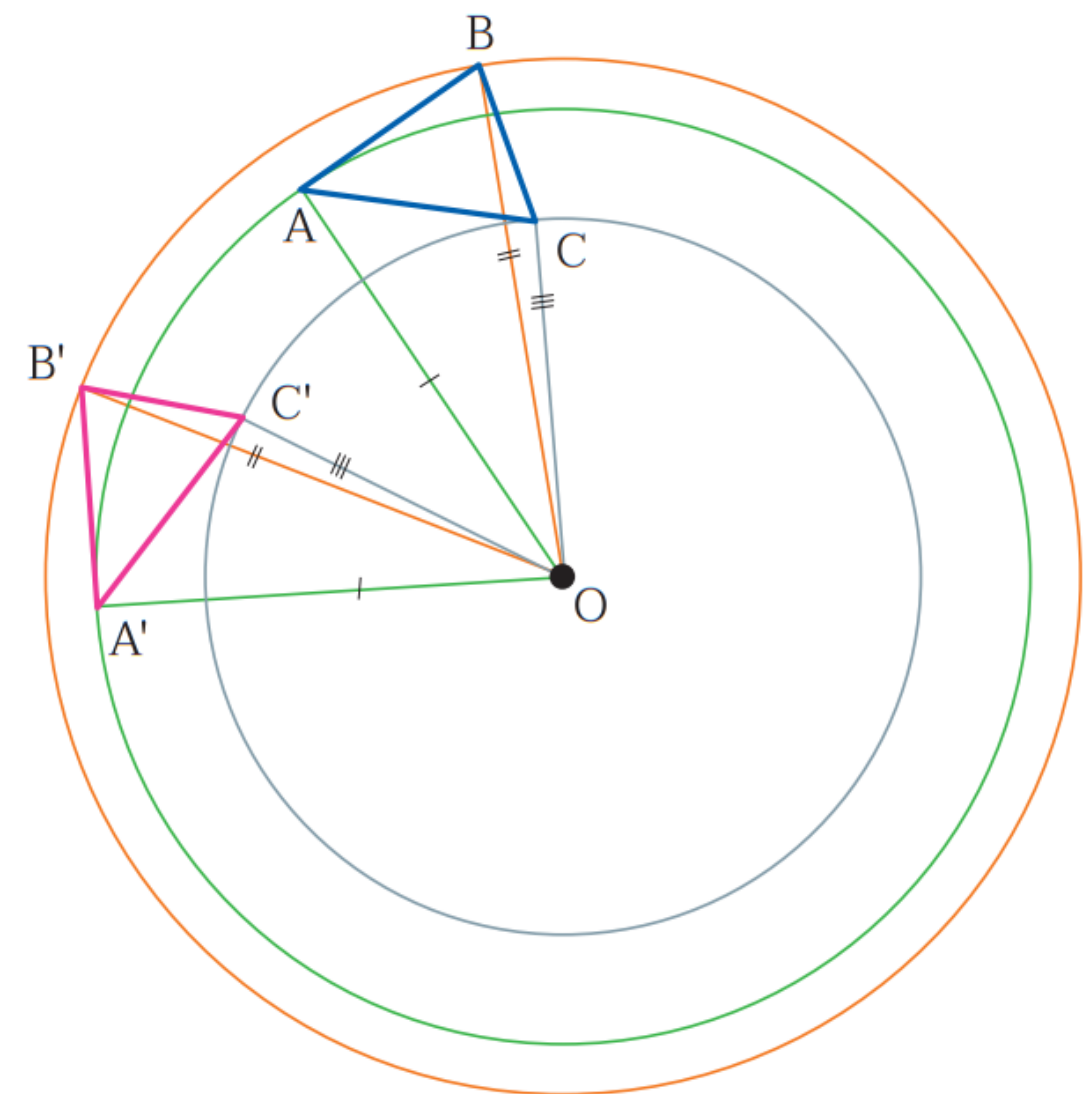


จากการวัดความยาวแล้วพบว่า
 $OA = OA'$, $OB = OB'$ และ
 $OC = OC'$ เมื่อเราวาดวงกลมที่มี
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด O ให้ผ่านจุด A
จะได้ว่า **วงกลมจะผ่านจุด A'**
ด้วยเช่นกัน



สมบัติของการหมุน

ข้อ 2

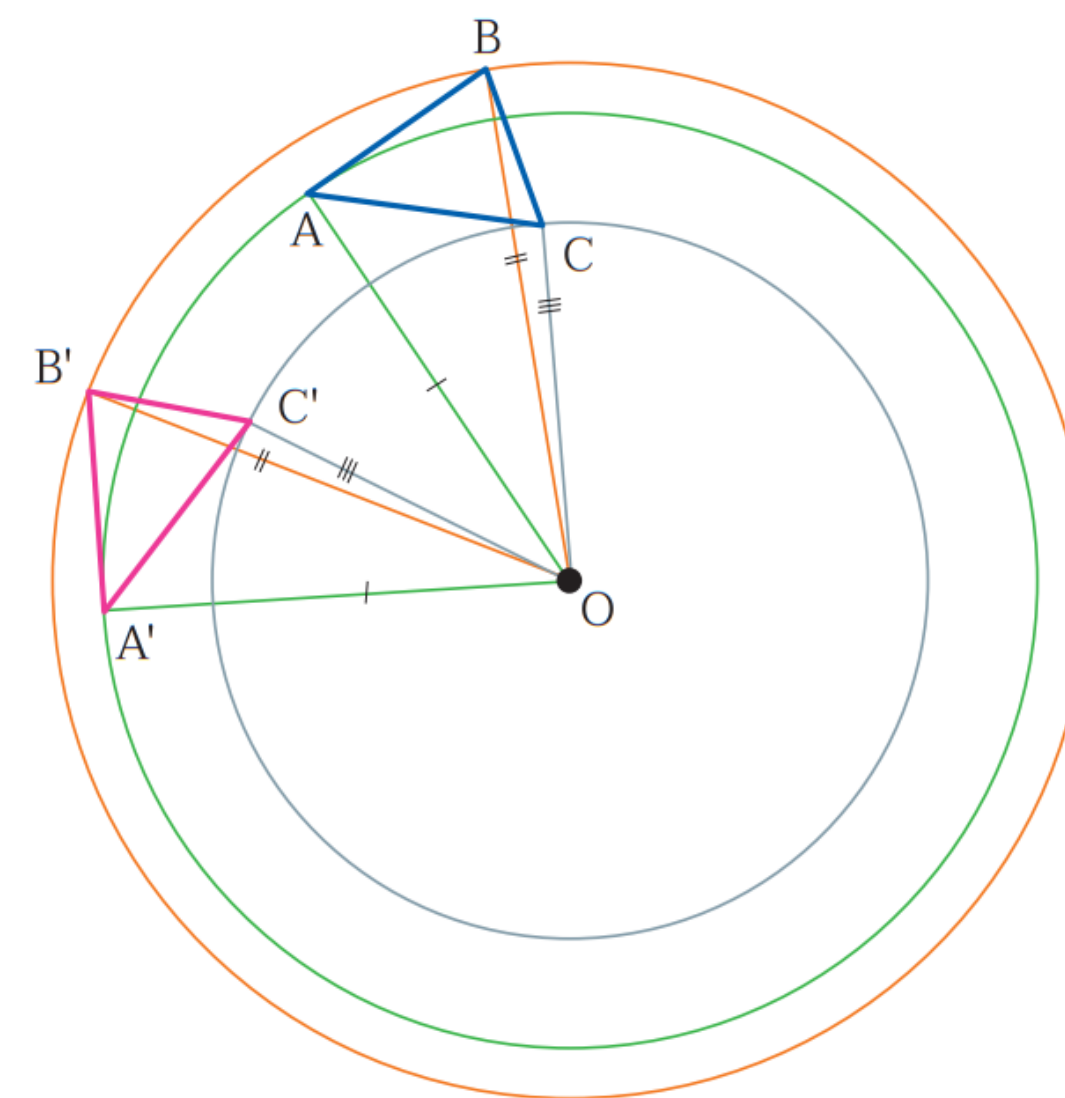


ในทำนองเดียวกันกับวงกลมที่ผ่าน
จุด B ก็将通过จุด B' และวงกลมที่
ผ่านจุด C ก็将通过จุด C' แต่วงกลม
ทั้งหลายเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมี
ยาวเท่ากัน



สมบัติของการหมุน

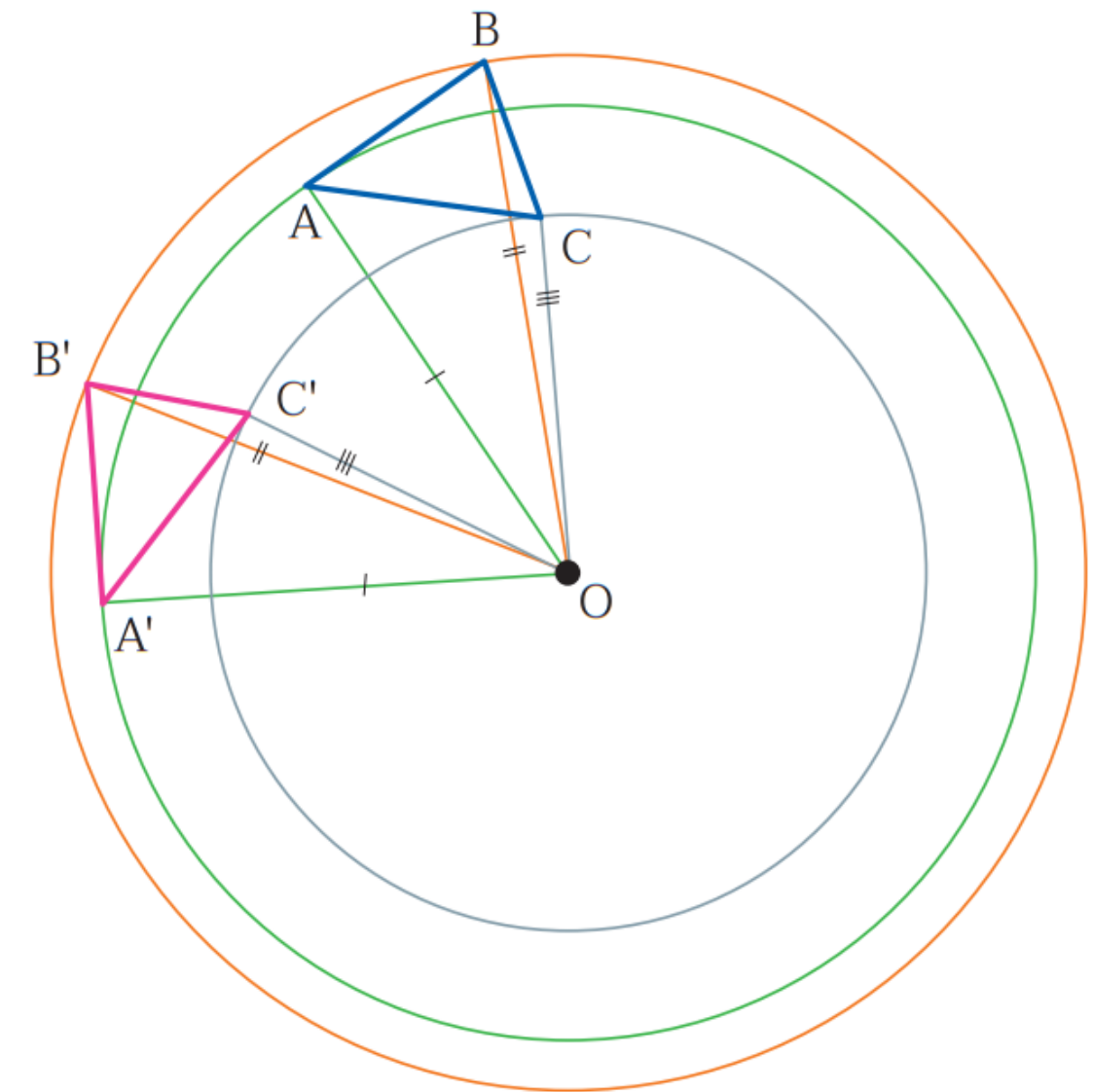
ข้อ 2





สมบัติของการหมุน

2) จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะ**อยู่บนวงกลมเดียวกัน**ที่มีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลางกลาง แต่วงกลมทั้งหลายเหล่านี้**ไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน**

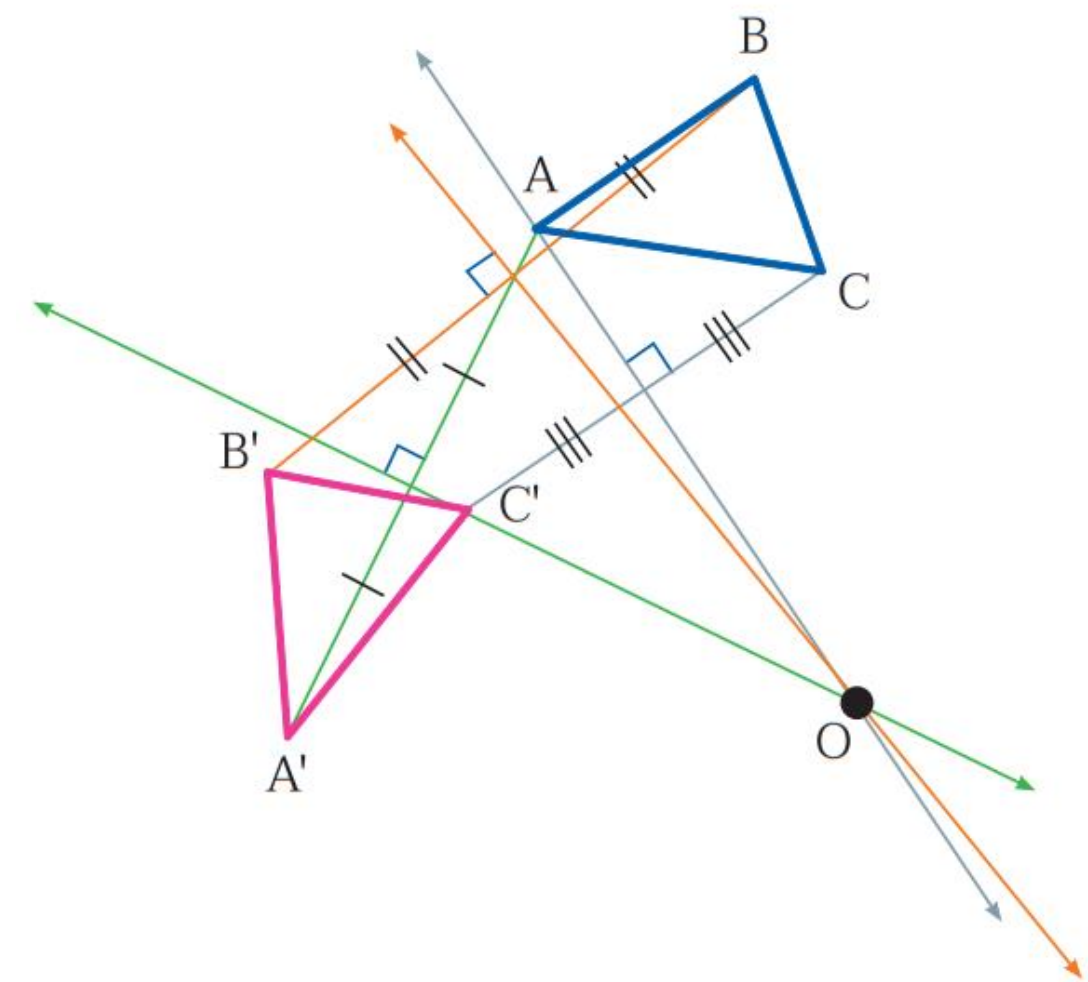


ถ้าลากส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม
ระหว่างจุดคู่ที่สมนัยกันแล้วสร้าง
เส้นตรงที่ตั้งฉากและผ่านจุดกึ่งกลาง
ของส่วนของเส้นตรงนี้



สมบัติของการหมุน

ข้อ 3

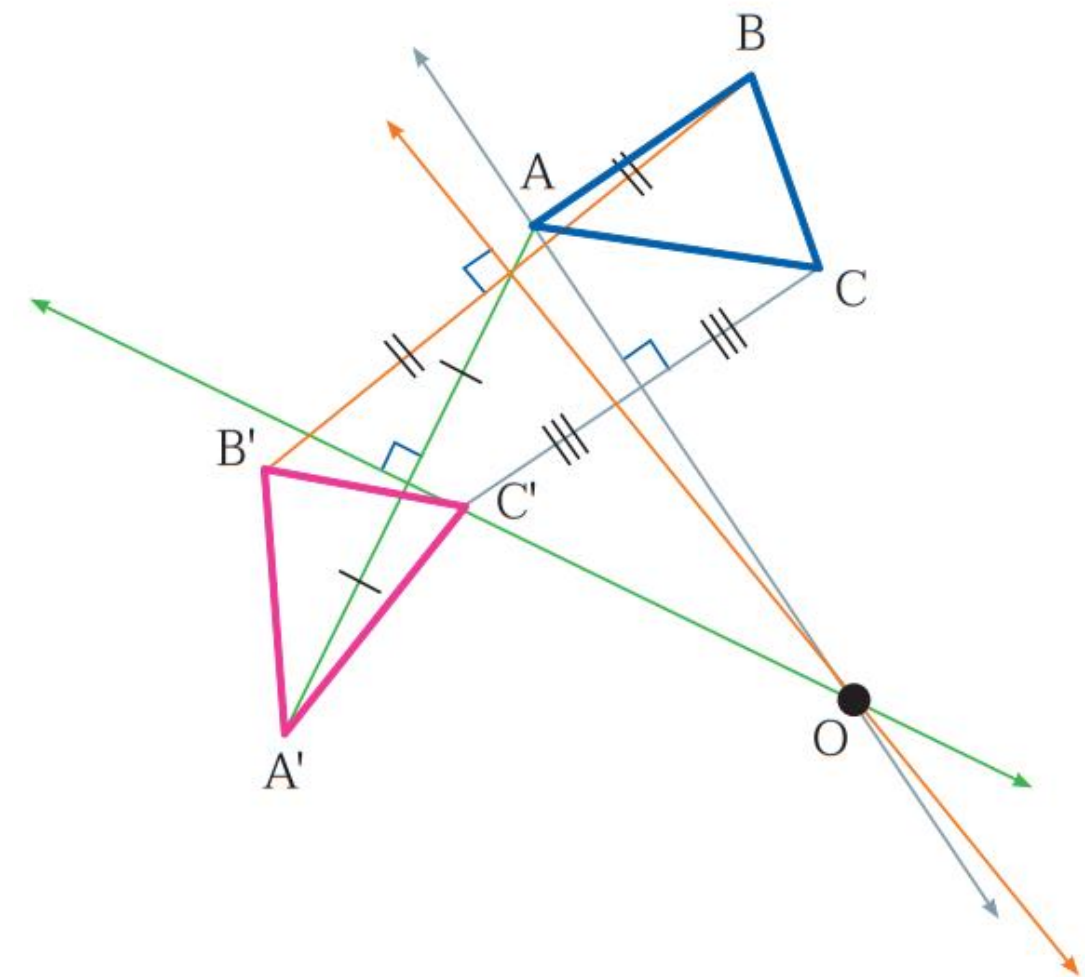


เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด
บนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จาก
การหมุนจุดนั้นจะผ่านจุดหมุนเสมอ



สมบัติของการหมุน

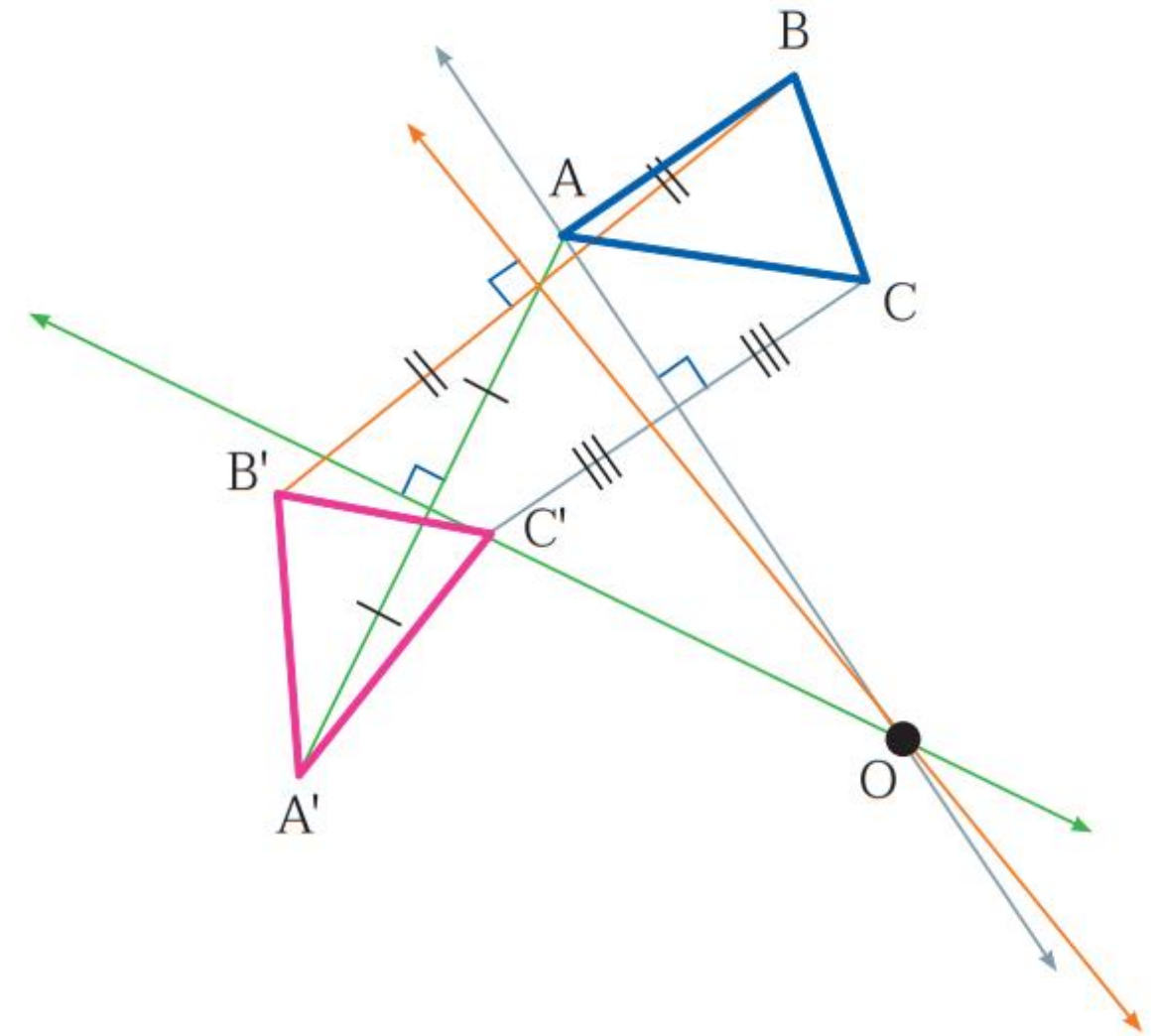
ข้อ 3





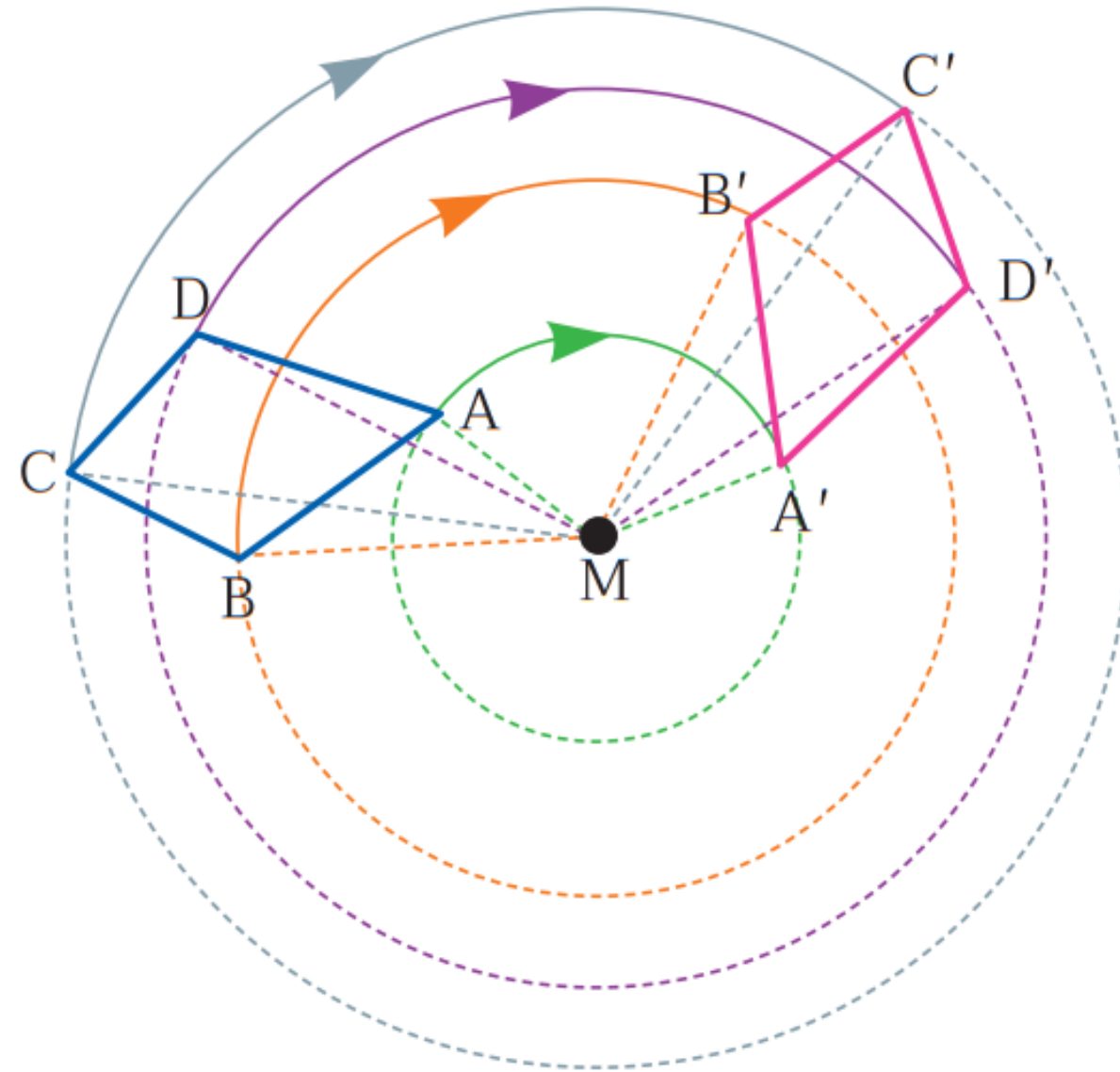
สมบัติของการหมุน

3) เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดบน
รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุน
จุดนั้นจะผ่านจุดหมุนเสมอ





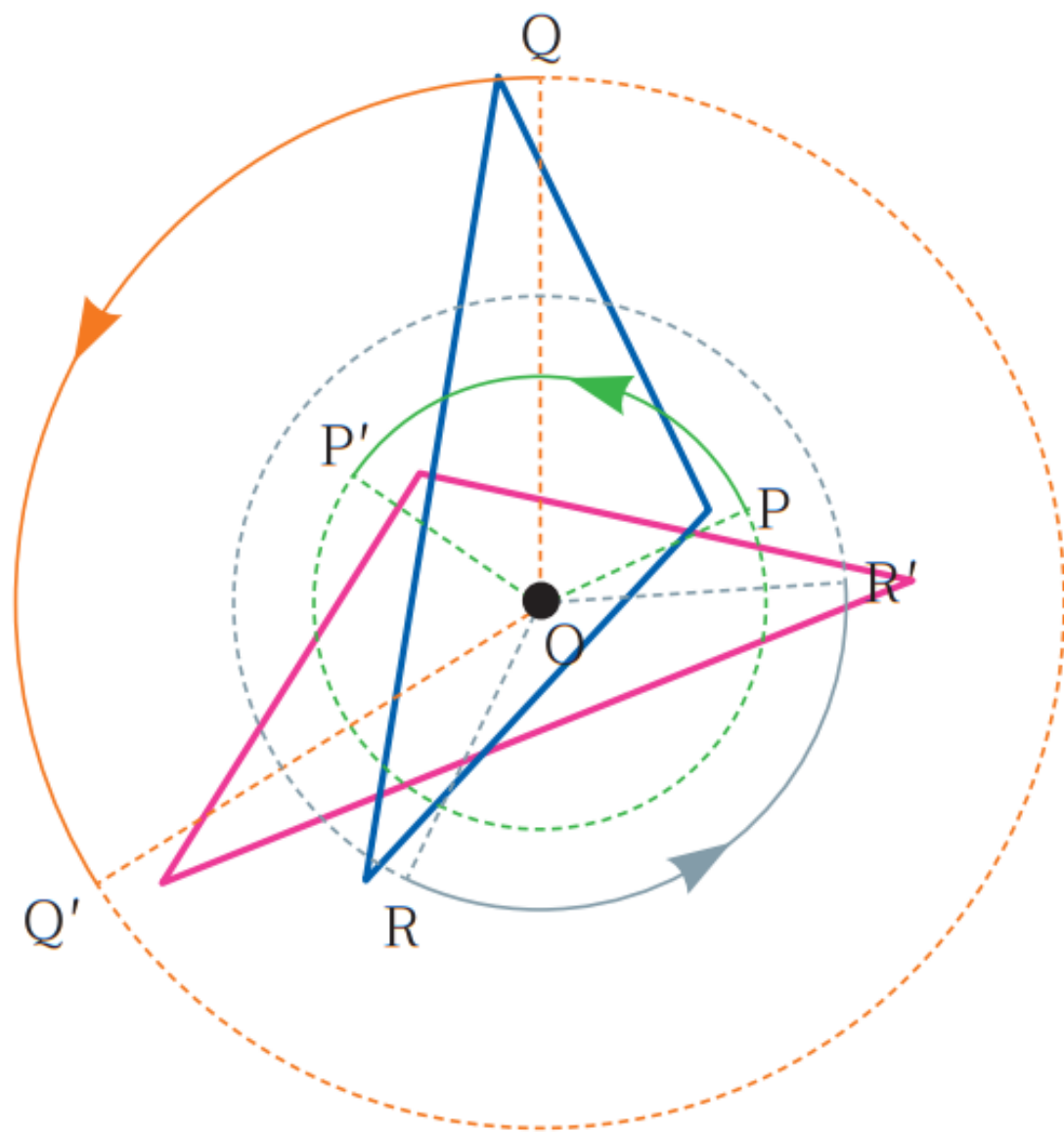
การหมุนบนระนาบที่จุดหมุนอยู่ภายนอกรูปต้นแบบ



จุดหมุน M อยู่ภายนอกรูปต้นแบบ



การหมุนบนระนาบที่จุดหมุนไม่อยู่ภายนอกรูปต้นแบบ

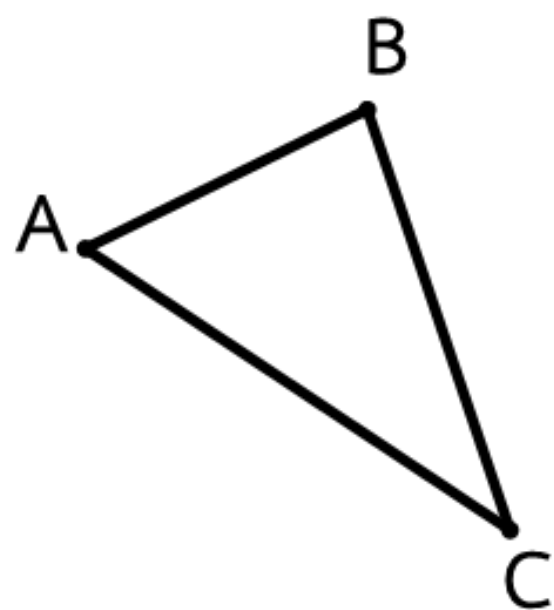


จุดหมุน O อยู่ภายในรูปต้นแบบ



ตัวอย่างที่ 1

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบ จุด P เป็นจุดหมุน
จงหา $\triangle A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle ABC$
ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90 องศา



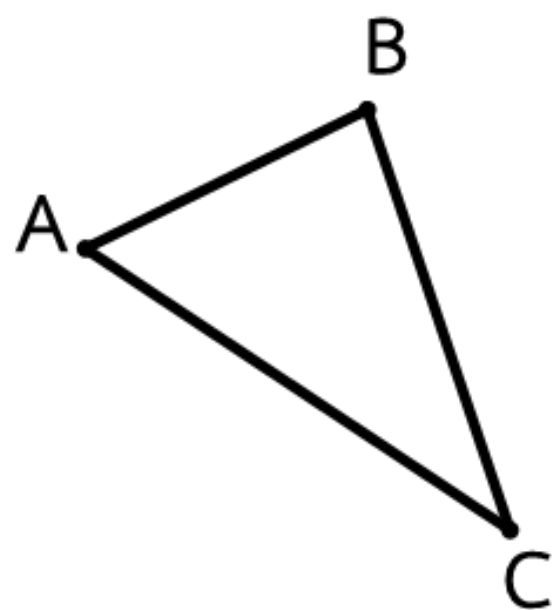
●
P

จากรูป $\triangle ABC$ มีจุด P เป็นจุดหมุน
ด้วยมุม 90 องศา ทิศทางทวนเข็
มนาฬิกา หากภาพที่ได้จากการหมุน
 $\triangle ABC$ ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบ จุด P เป็นจุดหมุน
จงหา $\triangle A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle ABC$
ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90 องศา



●
P

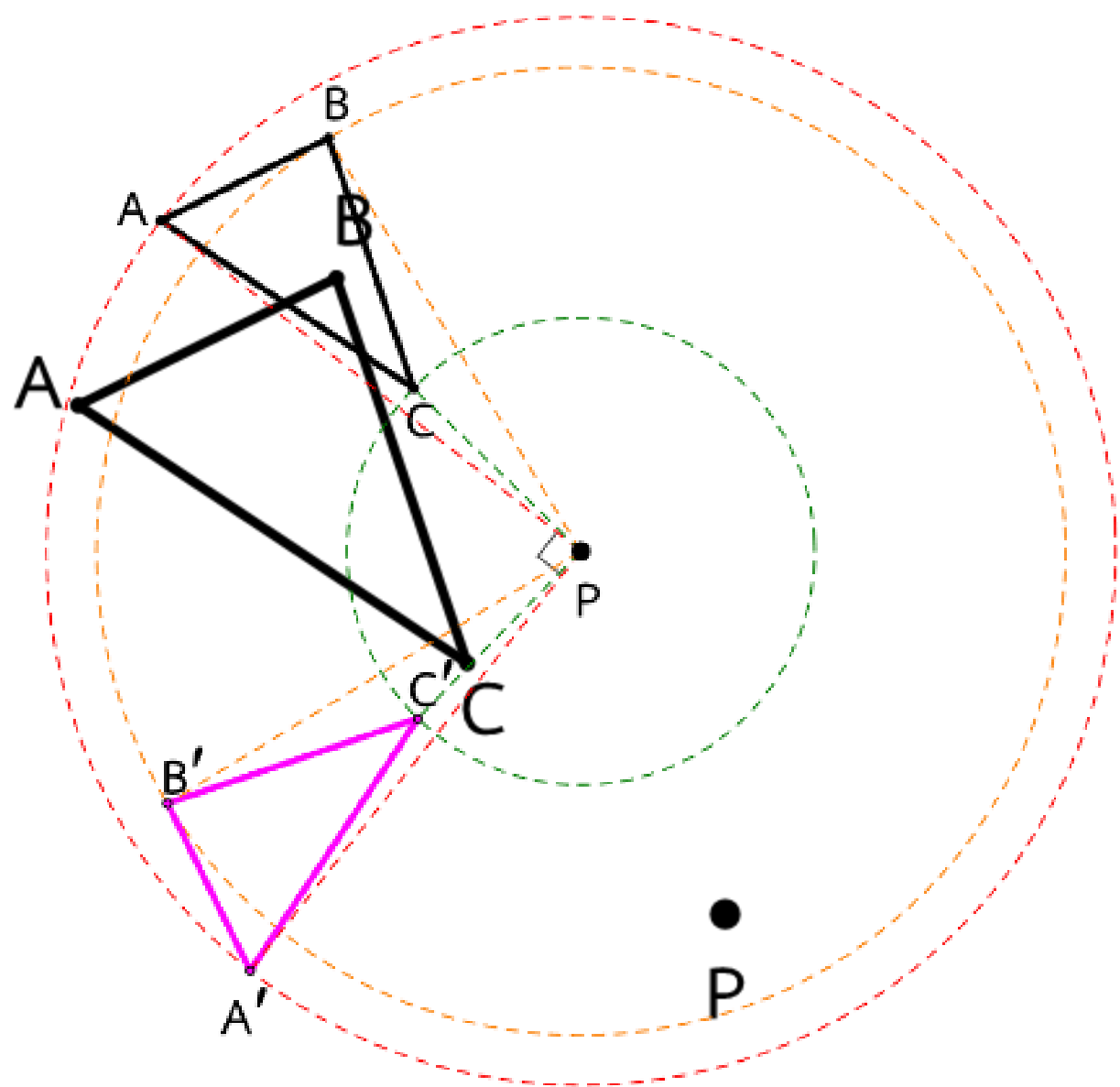
วิธีทำ

ลาก \overline{PA} , \overline{PB} และ \overline{PC} วาดวงกลม
ที่มีจุด P เป็นจุดศูนย์กลาง
รัศมี PA , PB และ PC ตามลำดับ



ตัวอย่างที่ 1

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบ จุด P เป็นจุดหมุน
จงหา $\triangle A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle ABC$
ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90 องศา



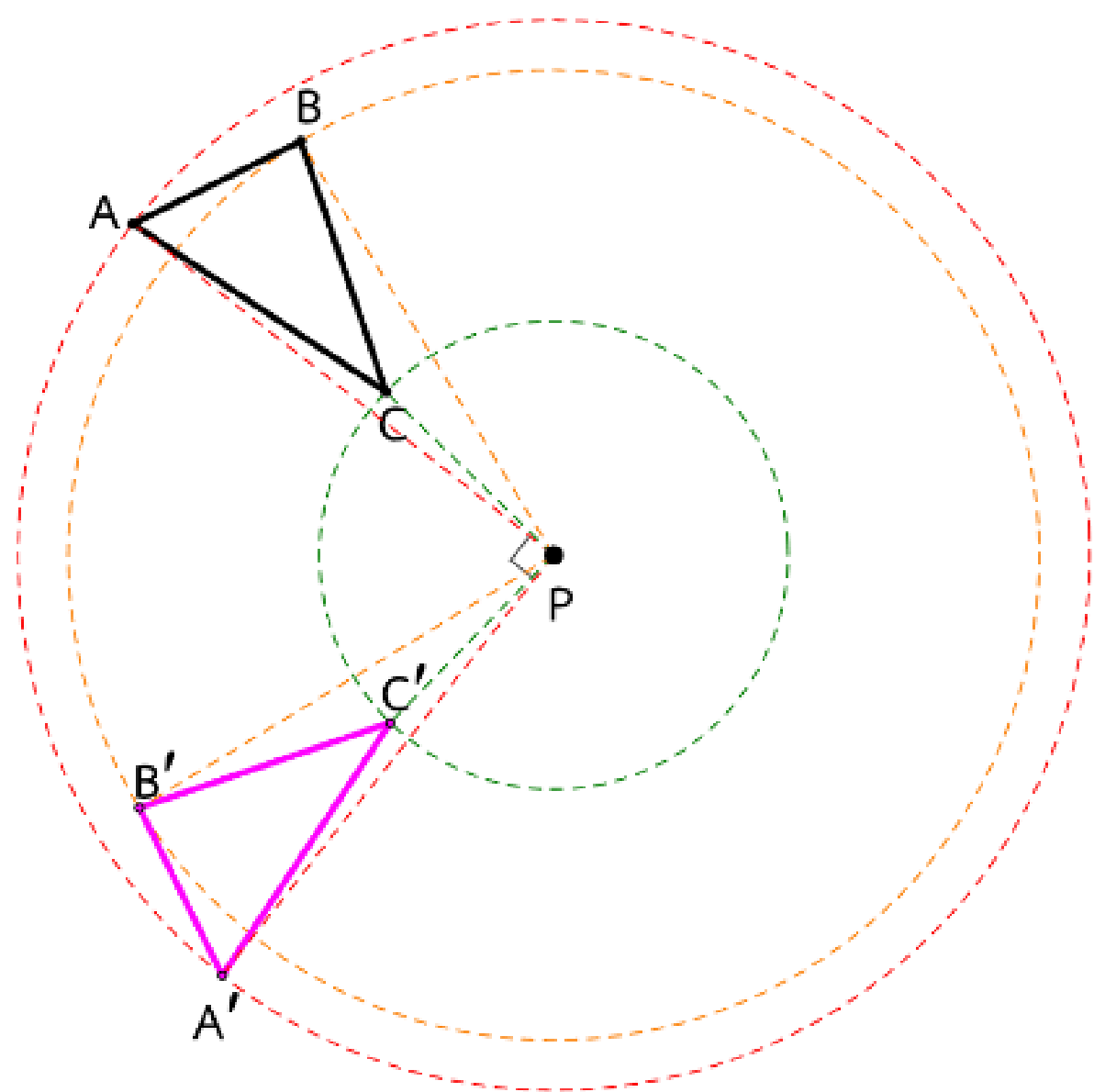
วิธีทำ

หาดำแหน่งของจุด A' จุด B' และจุด C'
ที่ทำให้ $\overline{PA'}$, $\overline{PB'}$ และ $\overline{PC'}$
ทำมุม 90 องศา กับ \overline{PA} , \overline{PB} และ \overline{PC}
ตามลำดับ



ตัวอย่างที่ 1

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบ จุด P เป็นจุดหมุน
จงหา $\triangle A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle ABC$
ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90 องศา

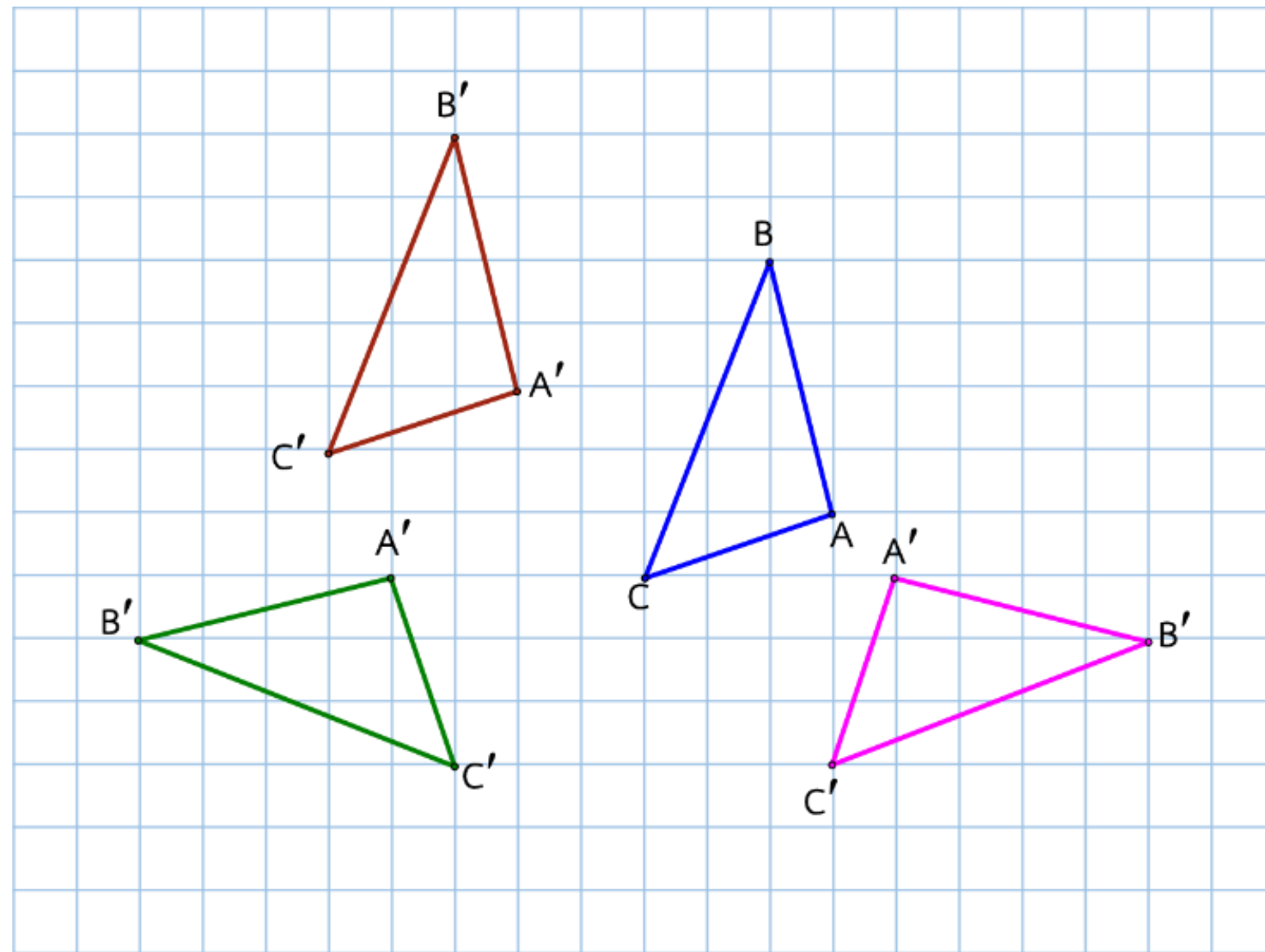


จะได้ว่า $\triangle A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จาก
การหมุน $\triangle ABC$ ทวนเข็มนาฬิกาด้วย
มุมที่มีขนาด 90 องศา

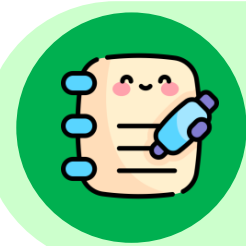


ตัวอย่างที่ 2

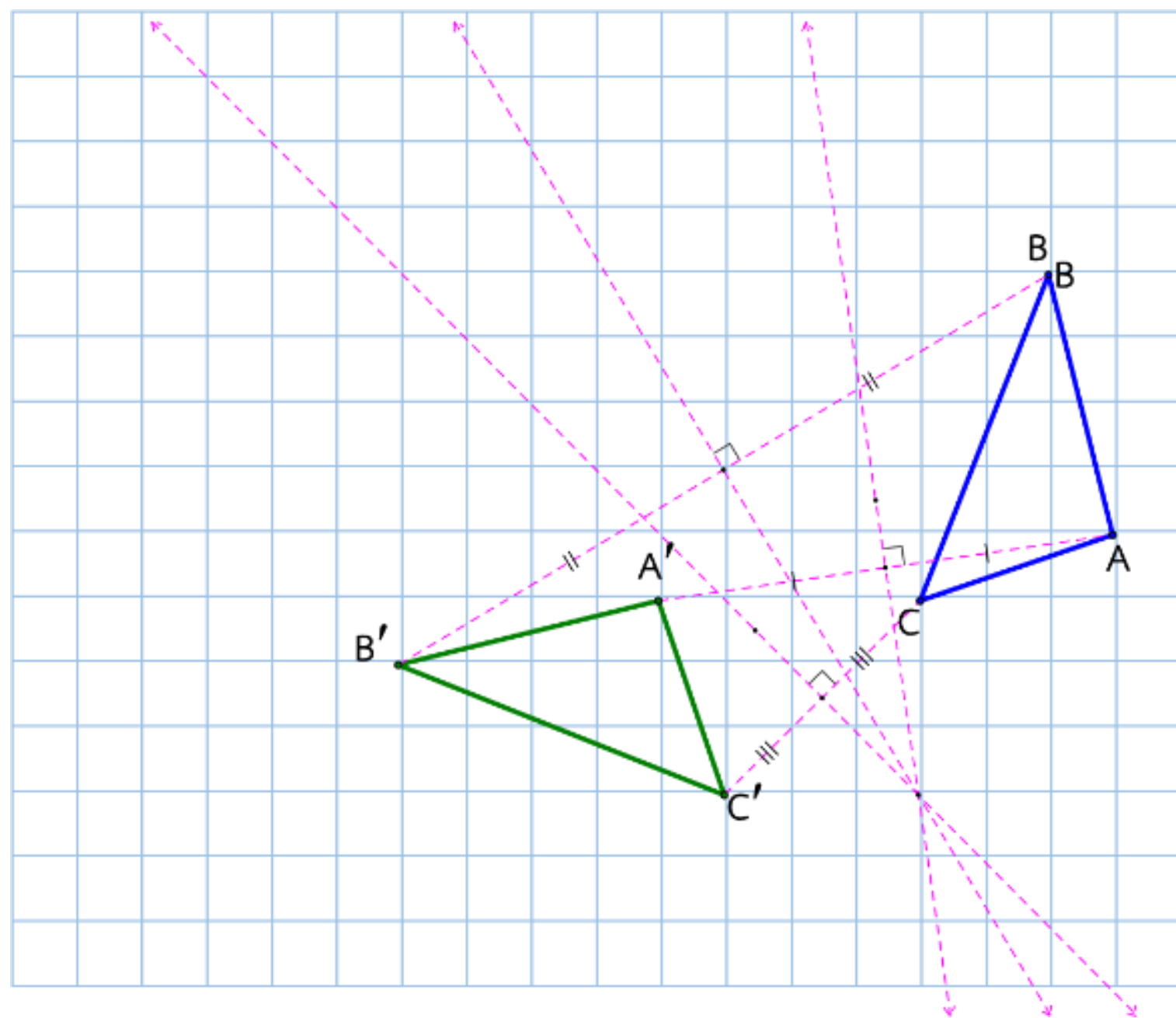
รูปต่อไปนี้ เป็นภาพที่ได้จากการแปลงทางเรขาคณิตซึ่งเท่ากัน
ทุกประการกับรูปต้นแบบ $\triangle ABC$ รูปใดเป็นภาพที่ได้จากการหมุน
 $\triangle ABC$ เพราะเหตุใด



แนวคิด เนื่องจากโจทย์กำหนดให้รูปทุกรูป
เท่ากันทุกประการแล้ว ถ้าเส้นตรงที่แบ่ง
ครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม
ระหว่างจุดยอดคู่ที่สมนัยกันของ $\triangle ABC$
และ $\triangle A'B'C'$ ตัดกันที่จุดเดียวกันก็เพียงพอ
ที่จะกล่าวได้ว่า $\triangle A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จาก
การหมุน

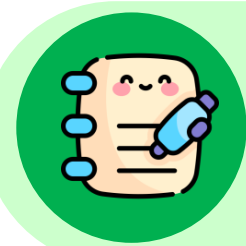


พิจารณา $\triangle ABC$ กับรูปสามเหลี่ยมสีเขียว

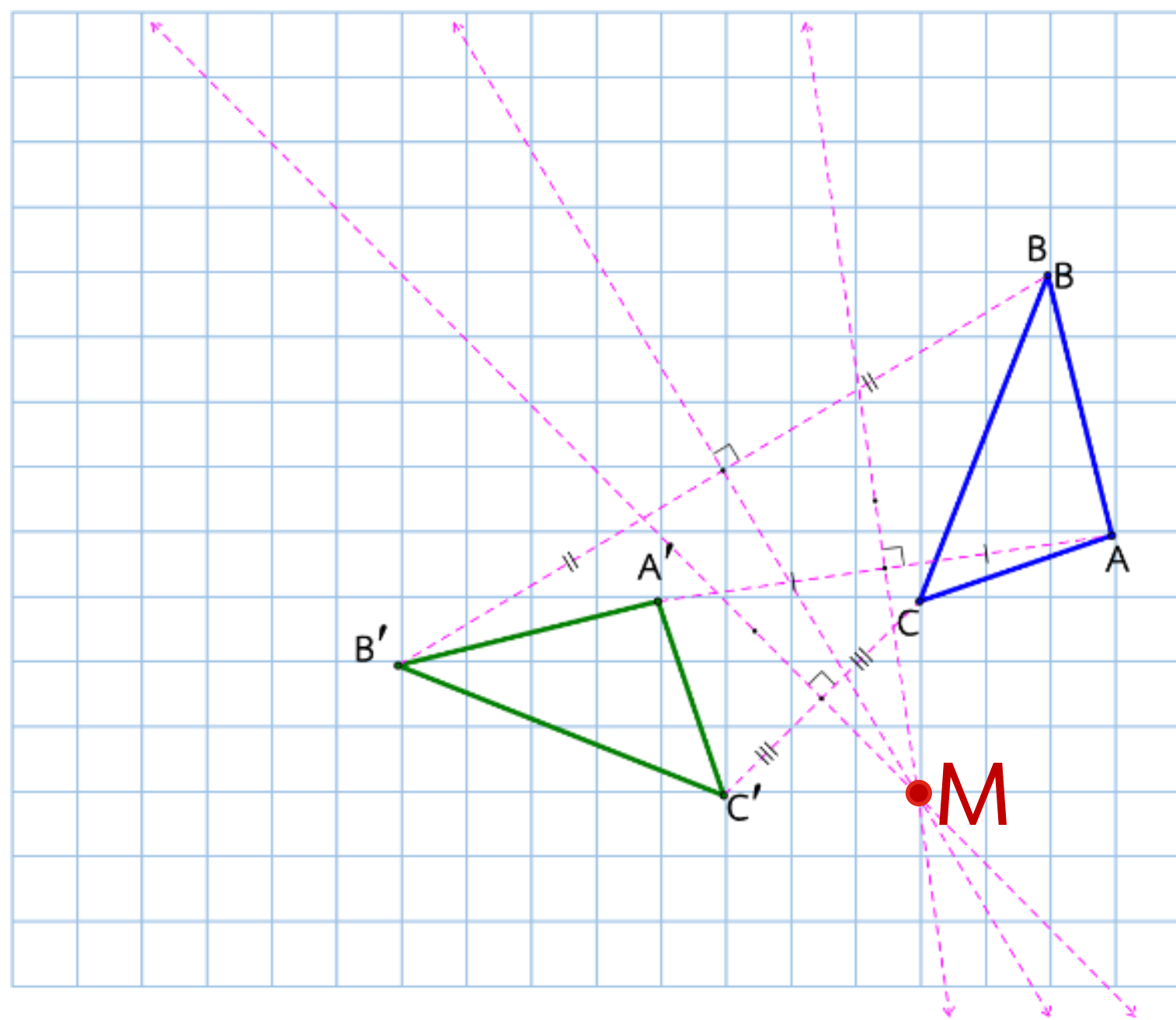


วิธีทำ

ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่าง
จุดยอดคู่ที่สมนัยกันทุกคู่
สร้างเส้นตรงแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอด
คู่ที่สมนัยกันทุกเส้น



พิจารณา $\triangle ABC$ กับรูปสามเหลี่ยมสีเขียว



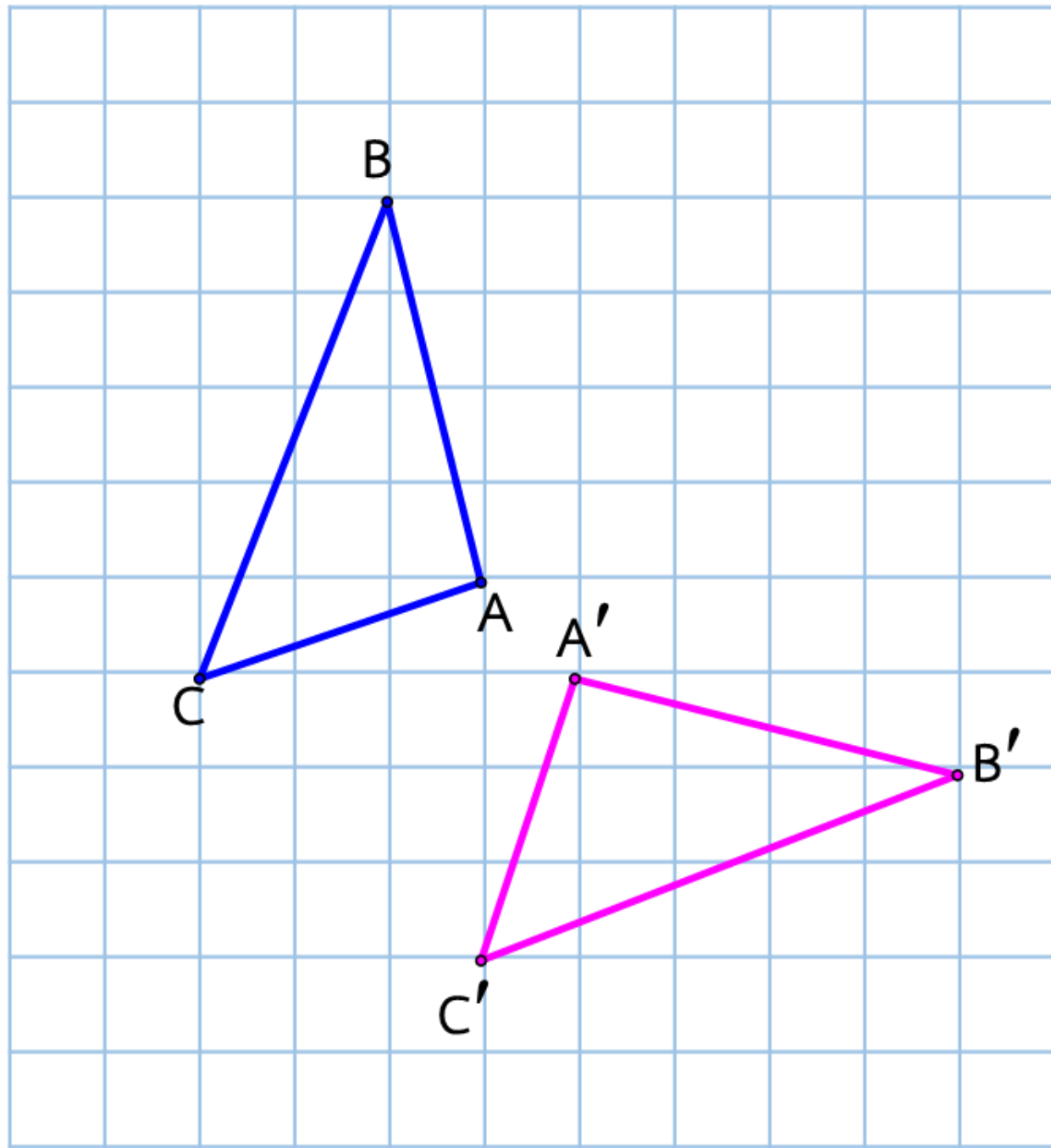
จะพบว่า เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากที่สร้างนั้นตัดกันที่จุด M

เพียงจุดเดียว

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมสีเขียวเป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle ABC$ โดยมีจุด M เป็นจุดหมุน



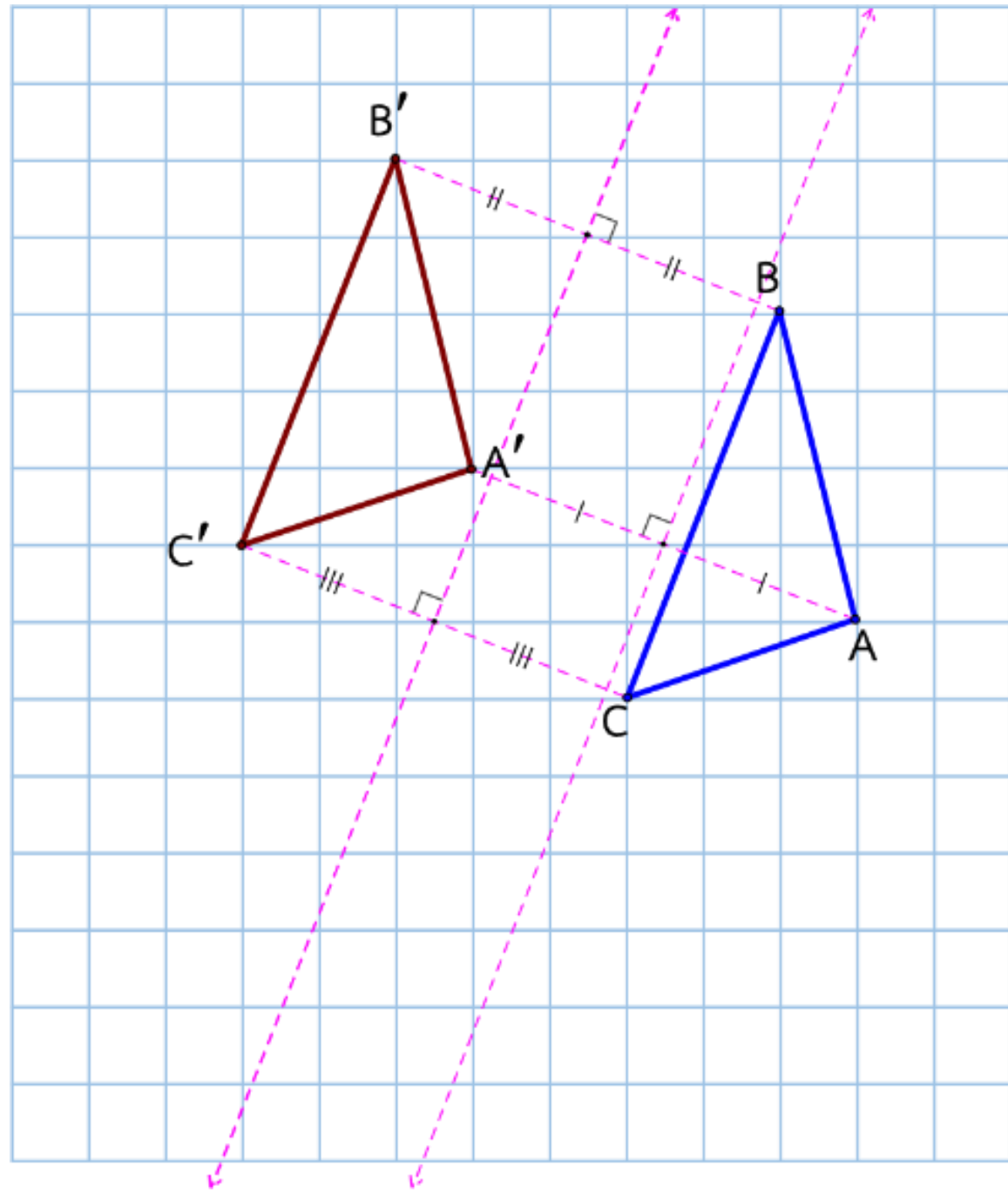
พิจารณา $\triangle ABC$ กับรูปสามเหลี่ยมสีชมพู



ในกรณีนี้ จะเห็นได้ชัดว่า
รูปทั้งสองนี้ไม่สามารถนำไป
ทับกันได้สนิท โดยไม่ต้องพลิกรูป
ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมสีชมพู
จึงไม่เป็นภาพที่ได้จากการหมุน
 $\triangle ABC$



พิจารณา $\triangle ABC$ กับรูปสามเหลี่ยมสีแดง

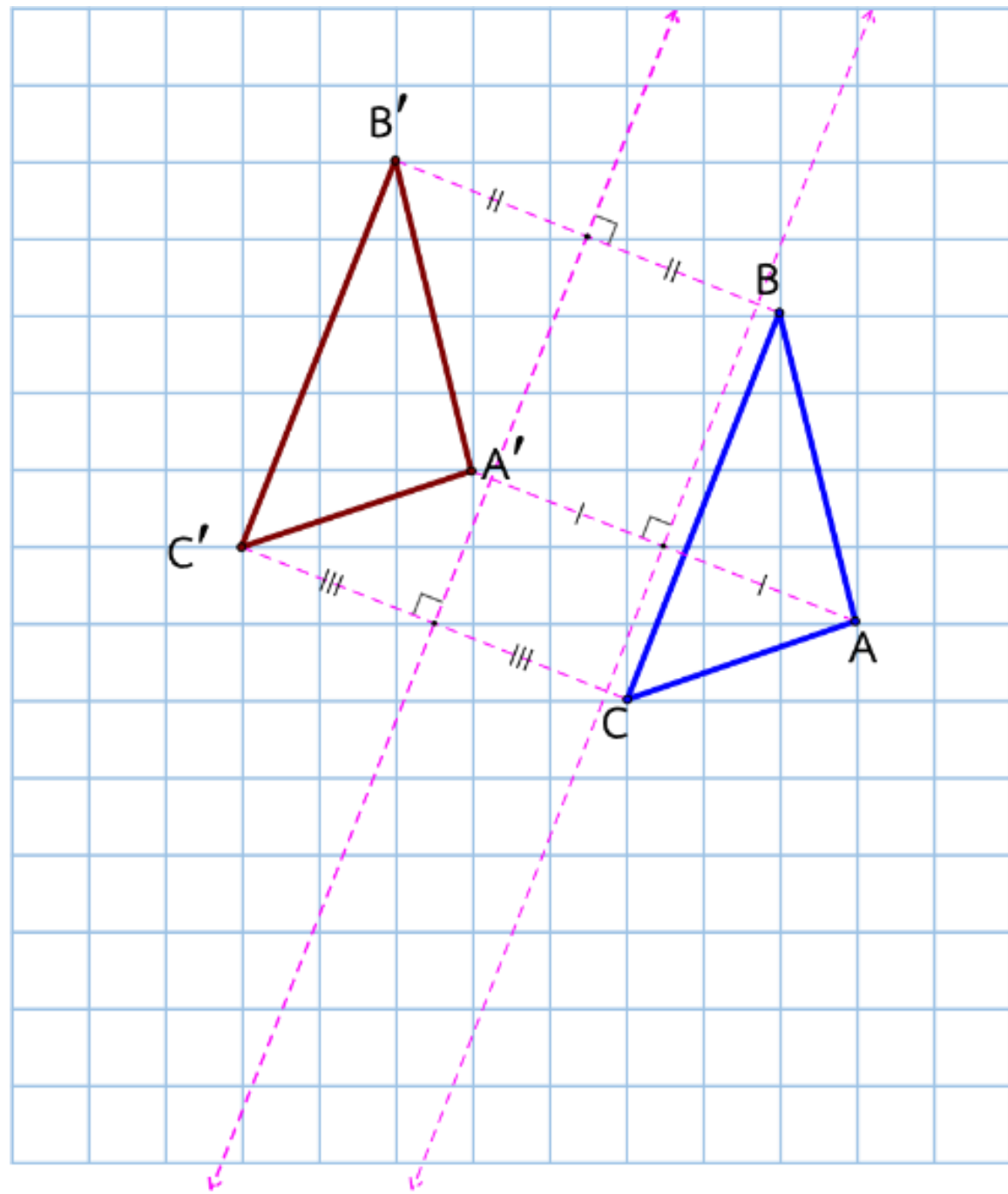


วิธีทำ

ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่าง
จุดยอดคู่ที่สมนัยกันทุกคู่
สร้างเส้นตรงแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอด
คู่ที่สมนัยกันทุกเส้น



พิจารณา $\triangle ABC$ กับรูปสามเหลี่ยมสีแดง



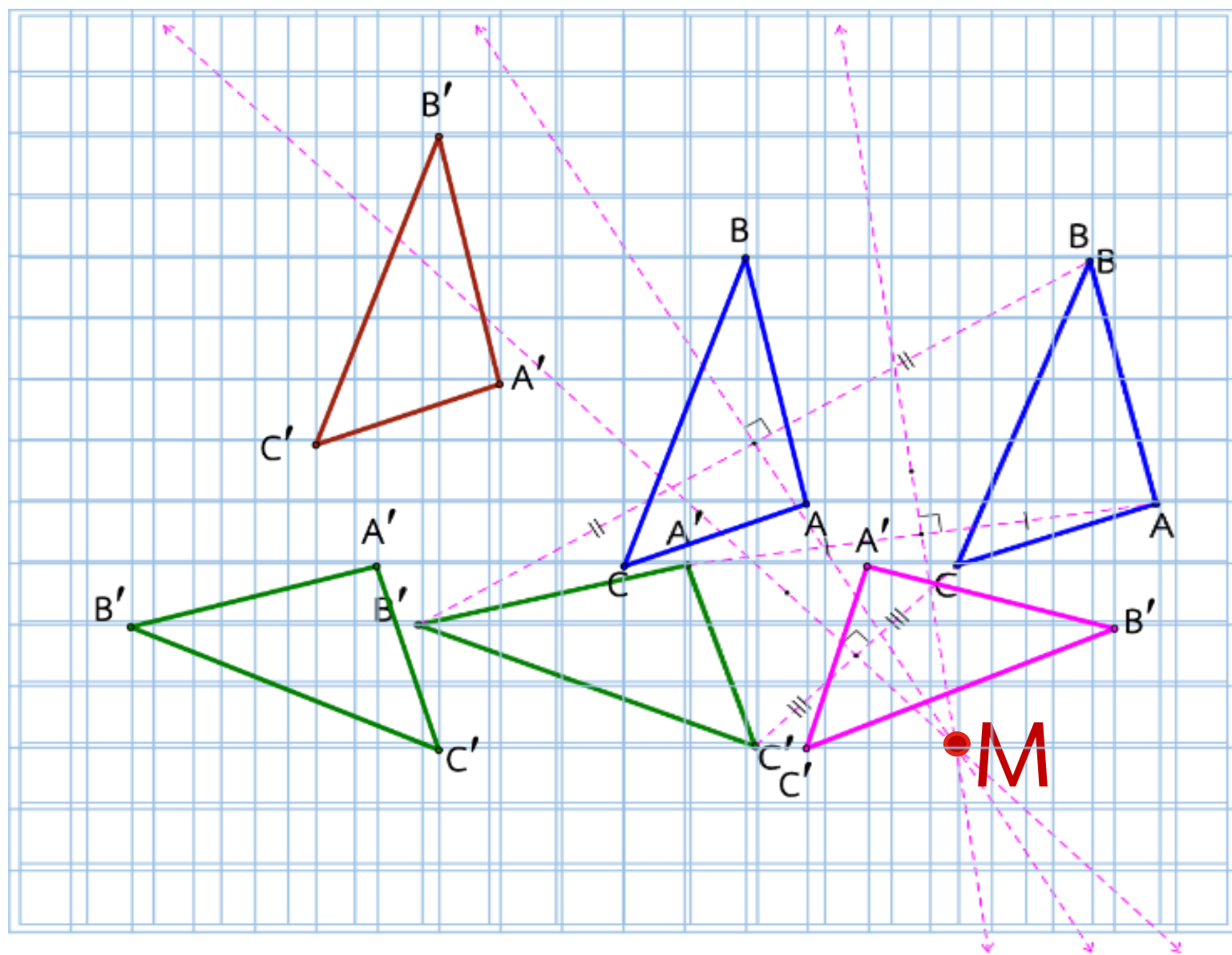
จะพบว่า เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากที่สร้างนั้นไม่ตัดกัน

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมสีแดงจึงไม่เป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle ABC$



ตัวอย่างที่ 2

รูปต่อไปนี้ เป็นภาพที่ได้จากการแปลงทางเรขาคณิตซึ่งเท่ากัน
ทุกประการกับรูปต้นแบบ $\triangle ABC$ รูปใดเป็นภาพที่ได้จากการหมุน
 $\triangle ABC$ เพราะเหตุใด



ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมสีเขียวเป็น
ภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle ABC$
โดยมีจุด M เป็นจุดหมุน



แบบฝึกหัด 9

การหมั่น (1)





แบบฝึกหัดที่ 9

เรื่อง การหมุน (1)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

แบบฝึกหัด 9 เรื่อง การหมุน (1)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

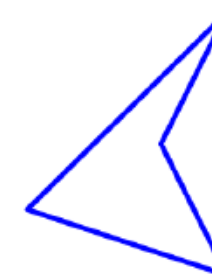
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 เรื่อง การหมุน (1)

รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค22101 ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการวัดขนาดของมุมในทิศทางที่กำหนด หรือใช้วงเวียนในการสร้างมุมที่มีขนาดตามที่กำหนด และหาภาพที่ได้จากการหมุนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. การหมุนรูปต้นแบบ รอบจุด P ด้วยมุม 45 องศา ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

P





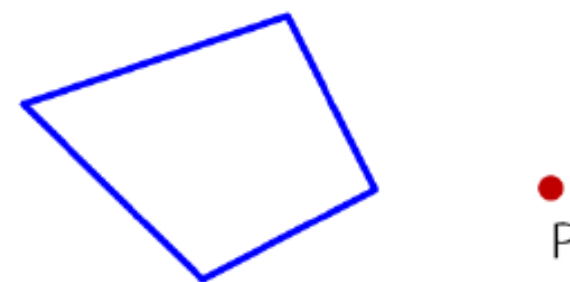
แบบฝึกหัดที่ 9

เรื่อง การหมุน (1)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

2. การหมุนรูปต้นแบบ รอบจุด P ด้วยมุม 180 องศา ทิศทางตามเข็มนาฬิกา



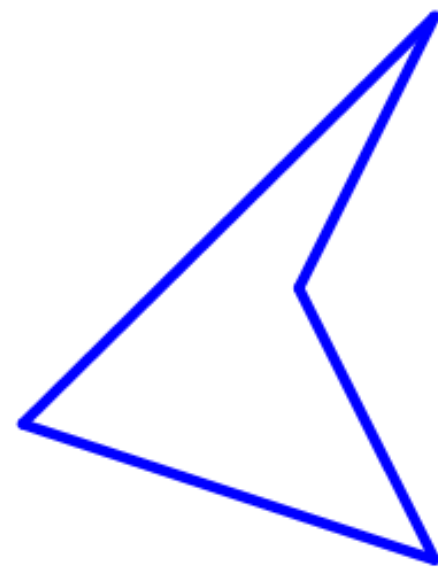


แบบฝึกหัด 9 : การหมุน (1)

คำชี้แจง

ให้นักเรียนใช้พรแทรกเตอร์เป็นเครื่องมือในการวัดขนาดของมุมในทิศทางที่กำหนด หรือใช้วงเวียนในการสร้างมุมที่มีขนาดตามที่กำหนด และหาภาพที่ได้จากการหมุนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) การหมุนรูปต้นแบบรอบจุด P ด้วยมุม 45 องศา ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



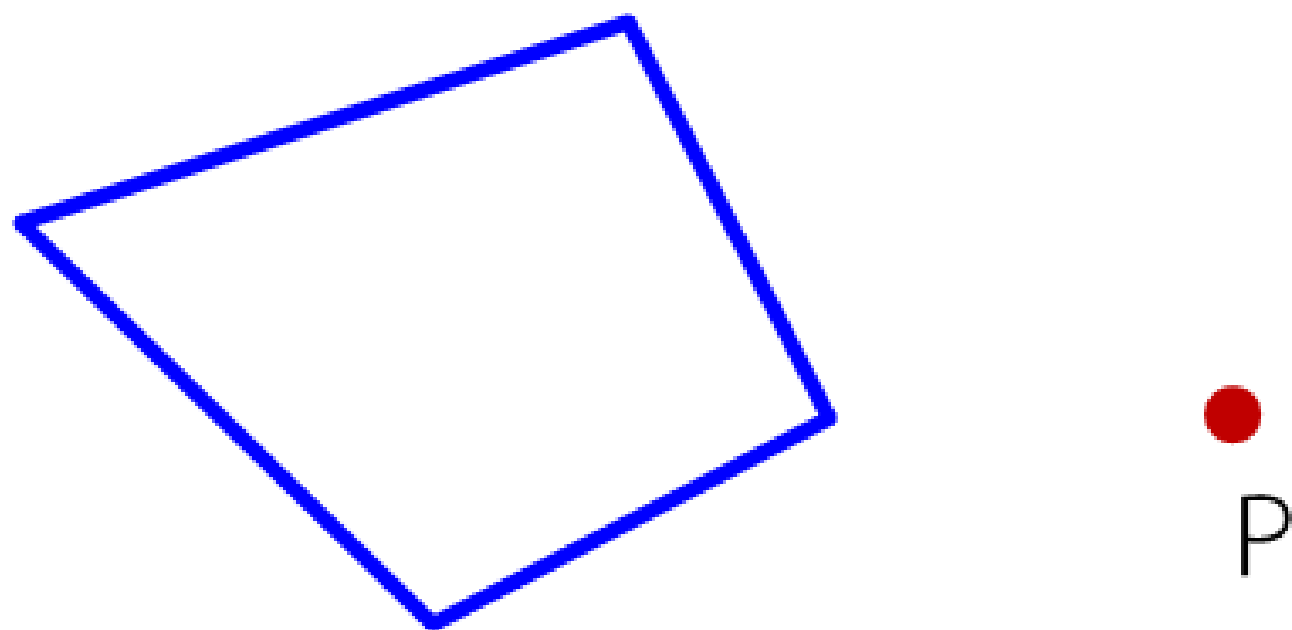
•
P



แบบฝึกหัด 9 : การหมุน (1)

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้พรแทรกเตอร์เป็นเครื่องมือในการวัดขนาดของมุมในทิศทางที่กำหนด หรือใช้วงเวียนในการสร้างมุมที่มีขนาดตามที่กำหนด และหาภาพที่ได้จากการหมุนในแต่ละข้อต่อไปนี้

2) การหมุนรูปต้นแบบ รอบจุด P ด้วยมุม 180 องศา ทิศทางตามเข็มนาฬิกา





เฉลย แบบฝึกหัด 9

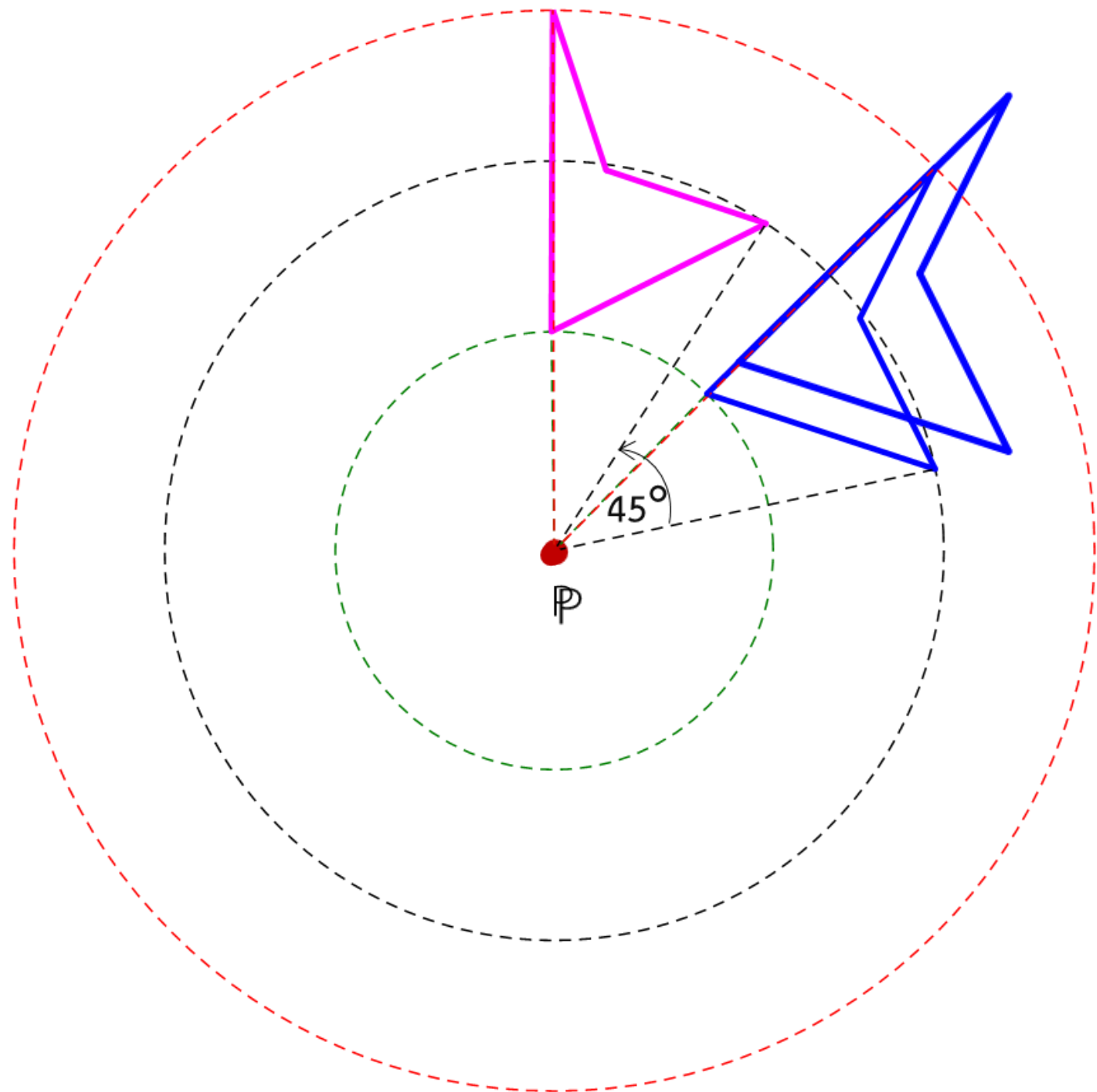
การหมูน (1)





แบบฝึกหัด 9 : การหมุน (1)

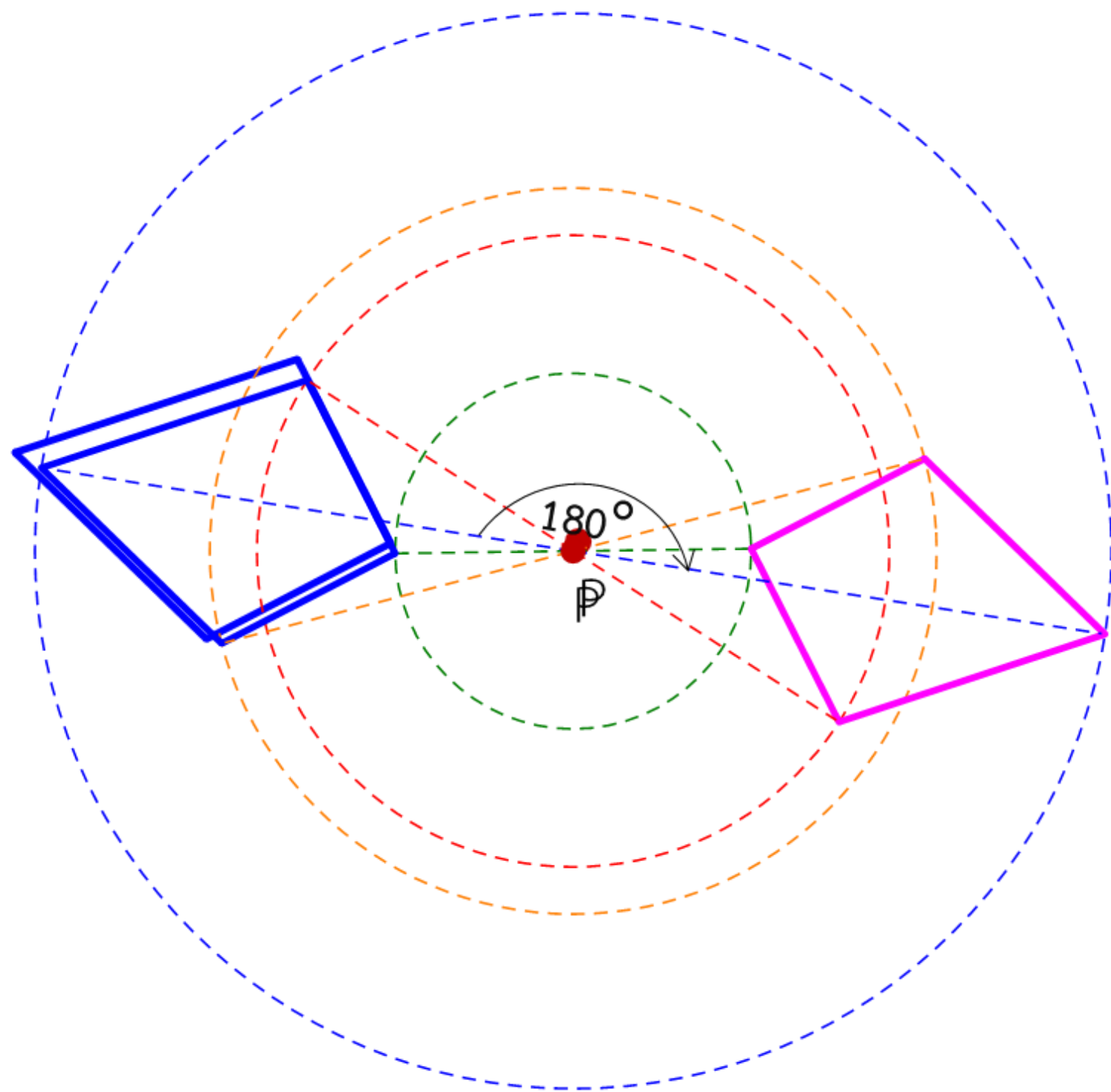
1) การหมุนรูปต้นแบบรอบจุด P ด้วยมุม 45 องศา ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา





แบบฝึกหัด 9 : การหมุน (1)

2) การหมุนรูปต้นแบบ รอบจุด P ด้วยมุม 180 องศา ทิศทางตามเข็มนาฬิกา





สรุปบทเรียน

ความรู้กันหน่อย

การหมุนบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่ง

เป็นจุดหมุนหรือจุดศูนย์กลางของการหมุน แต่ละจุด P บนระนาบ

มีจุด P' เป็นจุดที่สมนัยกับจุด P และเป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P

รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนดด้วยมุมที่มีขนาด k องศา

$$\text{โดยที่ } OP = OP'$$



สรุปบทเรียน

ความรู้กันหน่อย

การหมุนบนระนาบ จุดหมุนอาจอยู่ภายนอกรูปต้นแบบหรือ
ไม่อยู่ภายนอกรูปต้นแบบก็ได้



บทเรียนครั้งต่อไป

เรื่อง การหมูน (2)





สิ่งที่ต้องเตรียม

แบบฝึกหัด 10 เรื่อง การหมุน (2)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่

www.dltv.ac.th)

