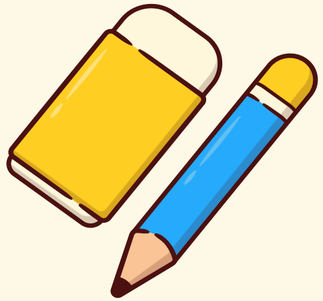
รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค23102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยที่ 7 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เรื่อง ค่าตรีโกณมิติของ มุม 30°, 45° และ 60°



ครูผู้สอน ครูสรวงรัตน์ เดชะชาติ

ค่าตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60°

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

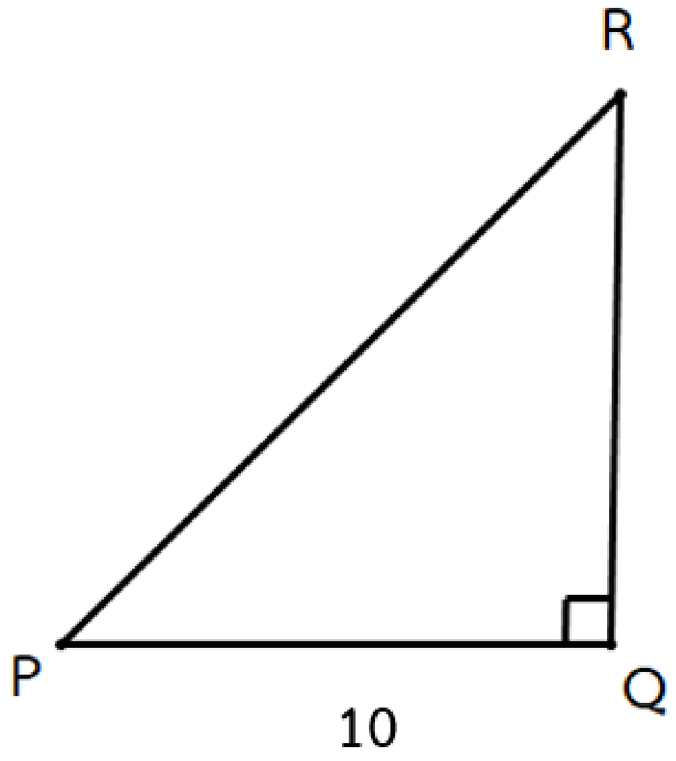
เฉลย

แบบฝึกหัด 2

อัตราส่วนตรีโกณมิติ (2)

ข้อที่ 1

กำหนดให้ $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม Q เป็นมุมฉาก PQ = 10 หน่วย และ $\cos P = \frac{\sqrt{2}}{2}$ จงหาค่าของ tan R



วิธีทำ จากโจทย์เขียน $\triangle PQR$ ได้ดังนี้

จากรูปจะได้ $\cos P = \frac{10}{RP}$

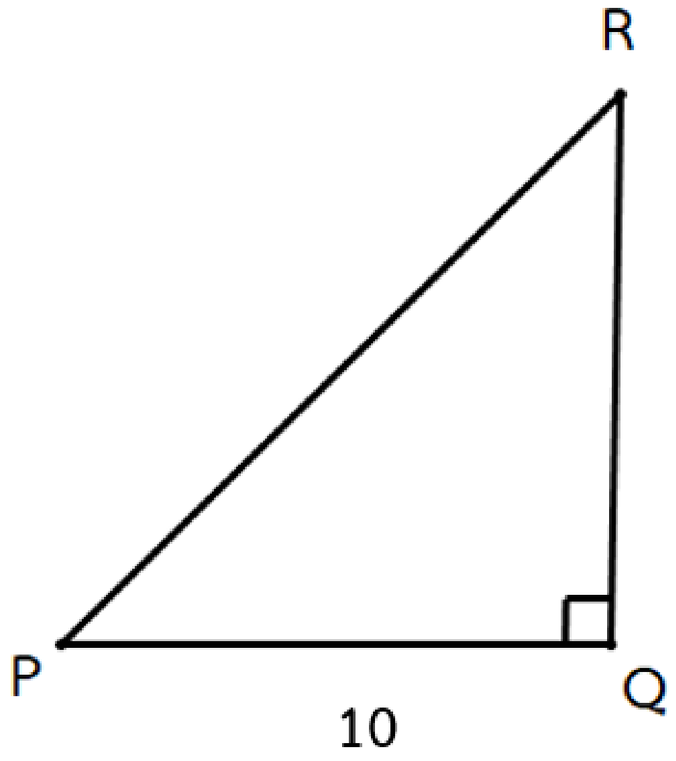
เนื่องจาก $\cos P = \frac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{RP}$

ดังนั้น $RP = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$ หน่วย

ข้อที่ 1

กำหนดให้ $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม Q เป็นมุมฉาก PQ = 10 หน่วย และ $\cos P = \frac{\sqrt{2}}{2}$ จงหาค่าของ tan R



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

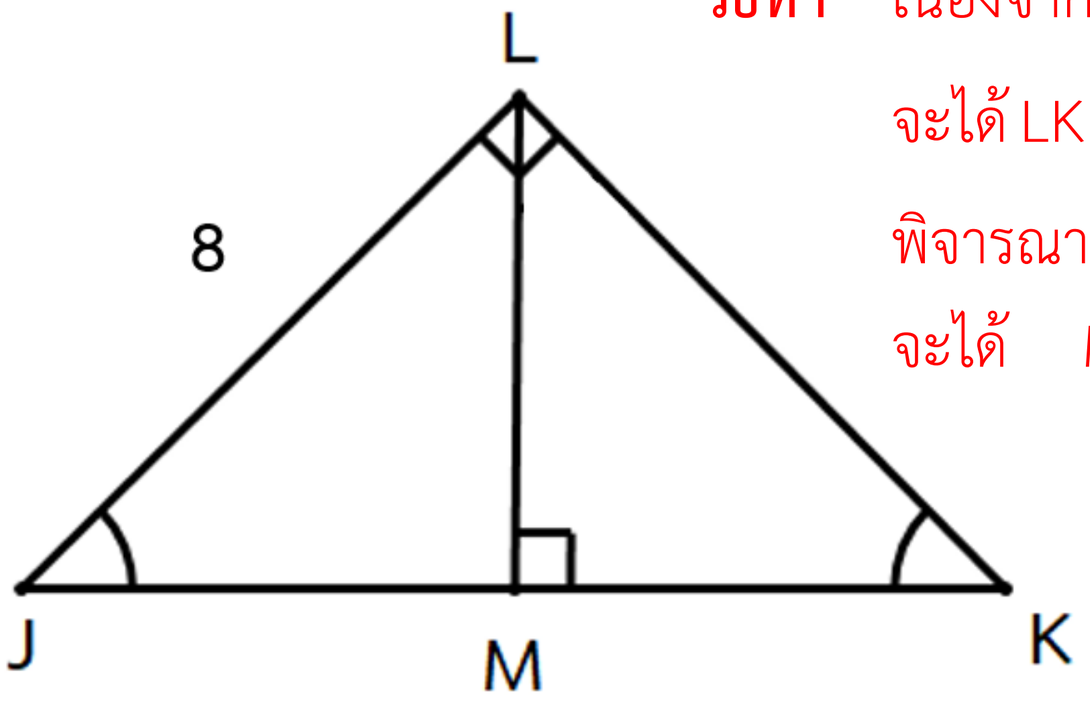
จะได้ $QR^2 = (10\sqrt{2})^2 - 10^2 = 100$

$QR = 10$ หน่วย

ดังนั้น $\tan R = \frac{10}{10} = 1$

ข้อที่ 2

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว JKL มี LJ = 8 หน่วย และ $\overline{LM}$ ตั้งฉากกับ $\overline{JK}$ ดังรูป จงหาค่าของ $\sin M\hat{K}L$



วิธีทำ เนื่องจาก ΔJKL เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุม JLK เป็นมุมฉาก

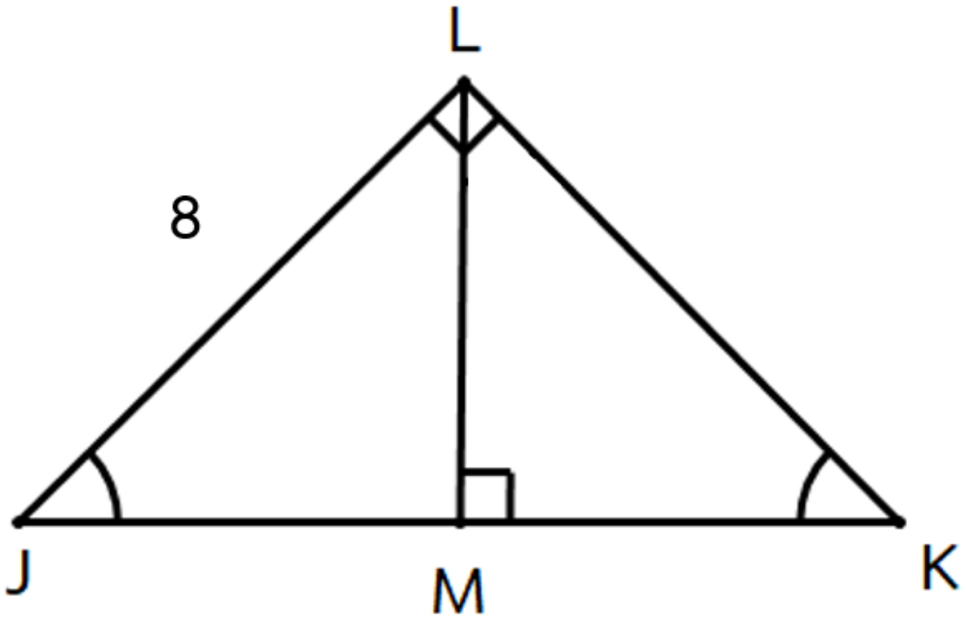
จะได้ LK = LJ = 8 หน่วย และ $J\hat{K}L = K\hat{J}L = 45°$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก LMK

จะได้ $M\hat{K}L = M\hat{L}K = 45°$ และ LM = MK

ข้อที่ 2

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว JKL มี LJ = 8 หน่วย และ $\overline{LM}$ ตั้งฉากกับ $\overline{JK}$ ดังรูป จงหาค่าของ $\sin M\hat{K}L$



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ $LK^2 = LM^2 + MK^2$

$8^2 = LM^2 + LM^2$

$8^2 = 2LM^2$

$LM^2 = 32$

$LM = 4\sqrt{2}$

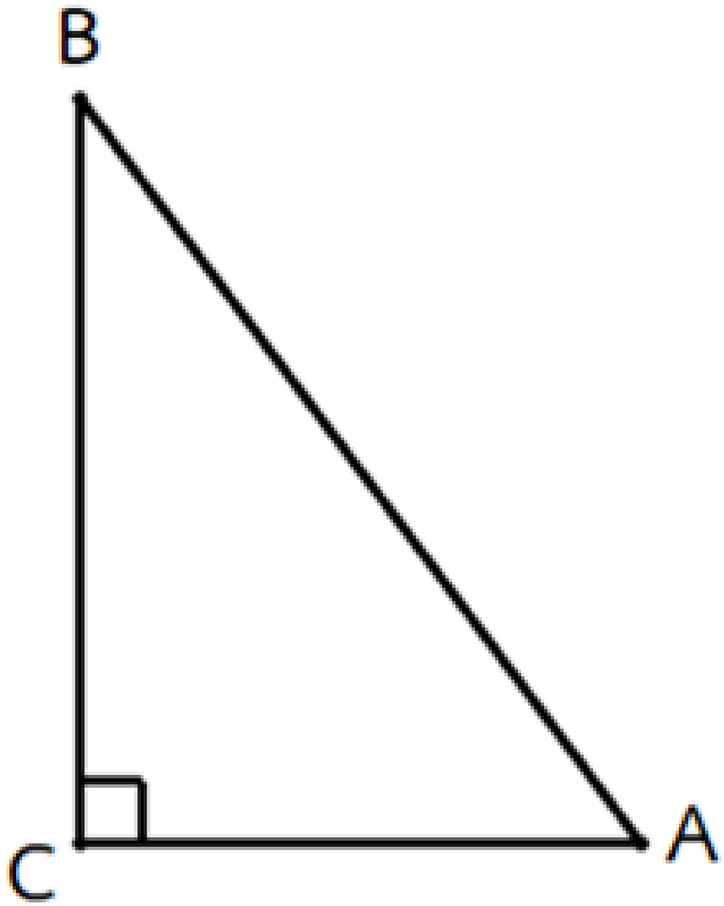
ดังนั้น $\sin M\hat{K}L = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

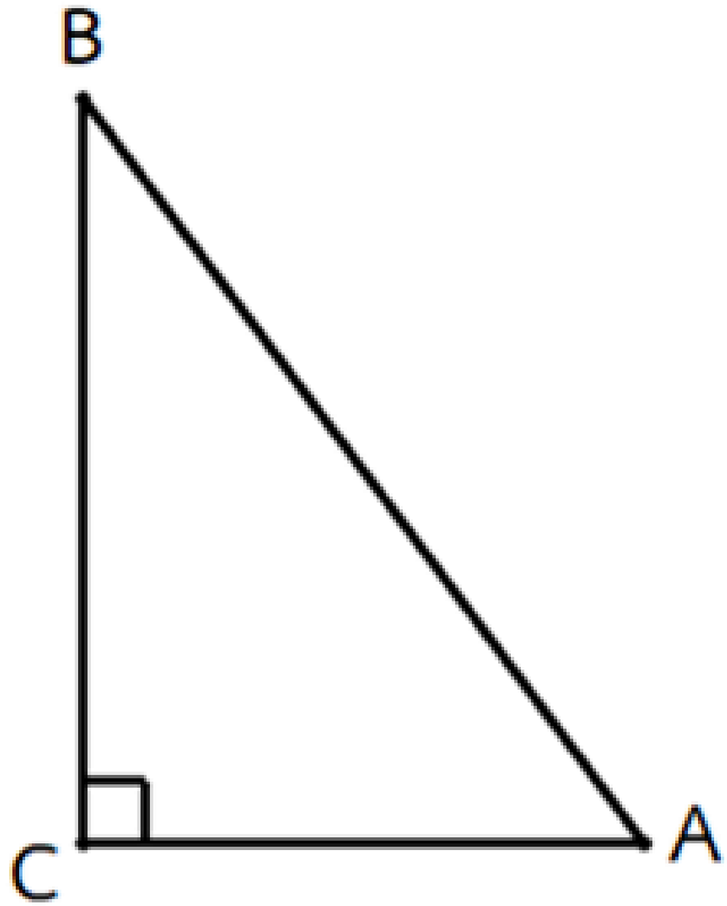
1. บอกค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60°

2. นำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60° ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

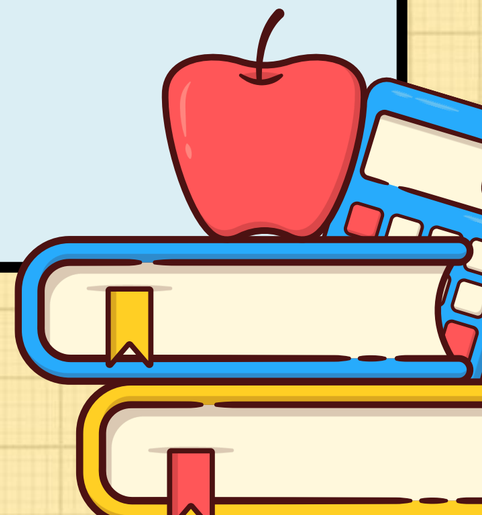


ทบทวน

tan A เป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติที่พิจารณาความยาวของด้านใดบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



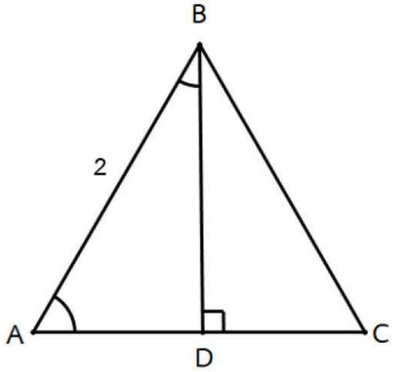
การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60°



ใบกิจกรรม 2 : อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60°
หน่วยการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้ แล้วเติมคำตอบและเหตุผลลงในตารางให้สมบูรณ์

มุมที่มีขนาด 30° และ 60°



จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่มี AB = 2 หน่วย และ D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$

ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
1	AD = หน่วย	
2	BD = หน่วย	
3	$A\hat{B}D$ = องศา	
4	sin 30° =	
5	cos 30° =	
6	tan 30° =	
7	$\hat{A}$ = องศา	
8	sin 60° =	
9	cos 60° =	
10	tan 60° =	

ใบกิจกรรม 2

อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60°

ใบกิจกรรม 2

อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60°

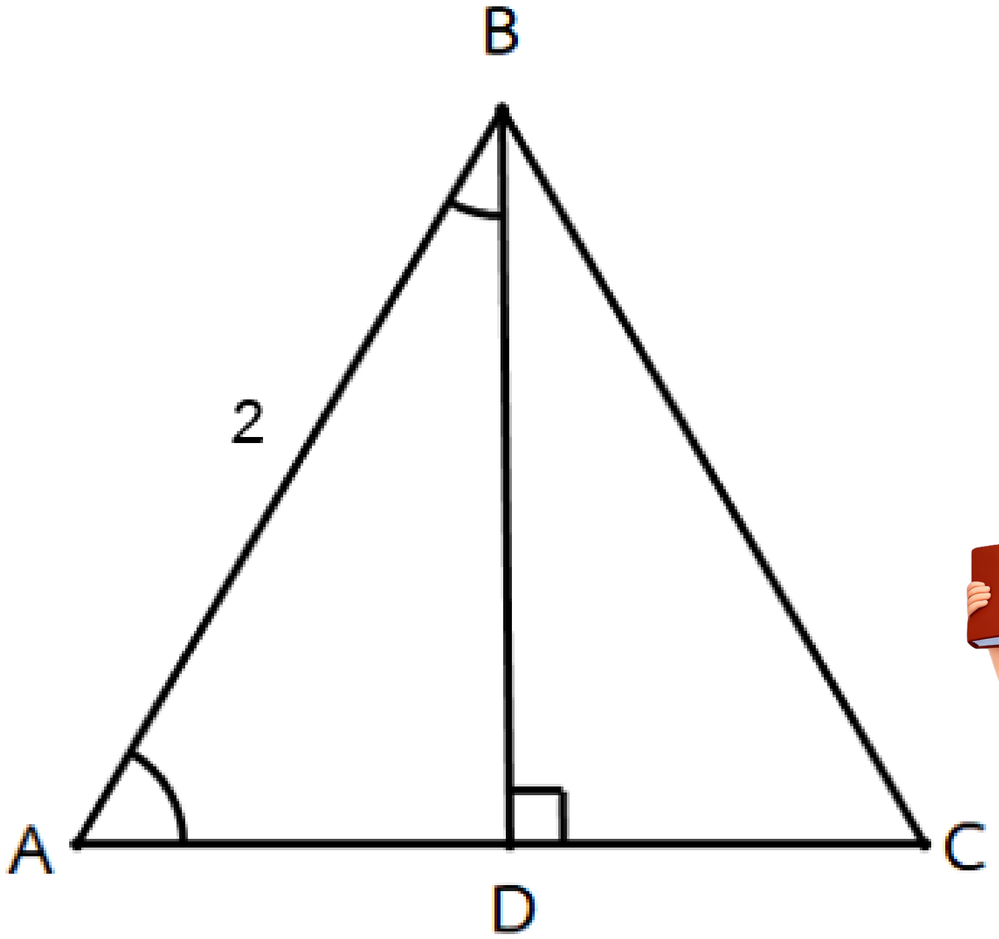
มุมที่มีขนาด 30° และ 60 °

จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC$

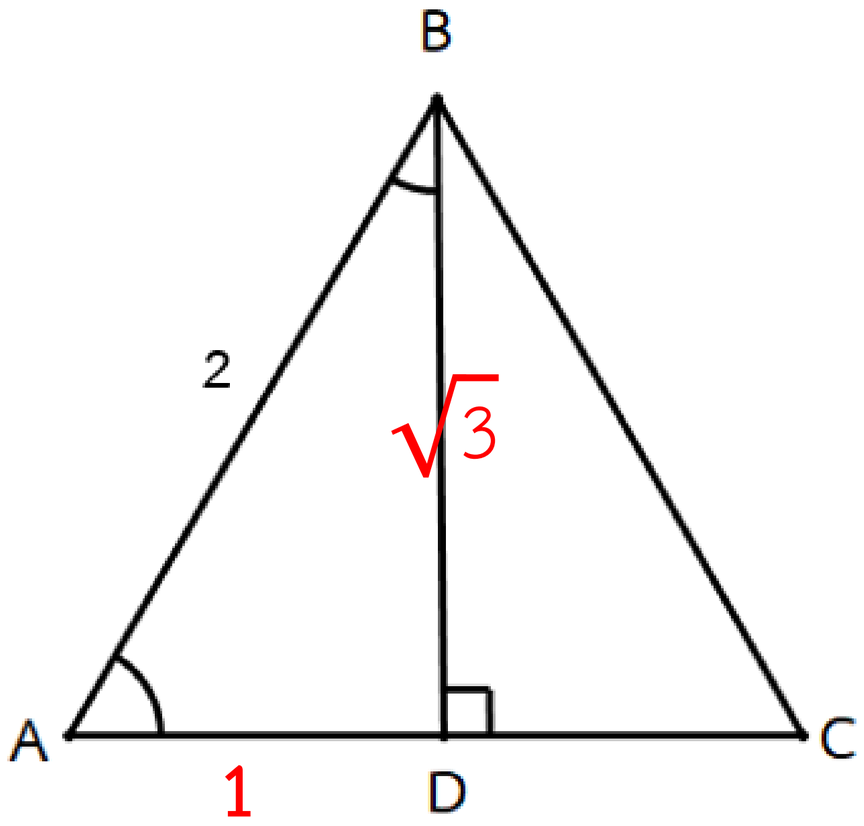
เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ที่มี AB = 2 หน่วย และ

D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$

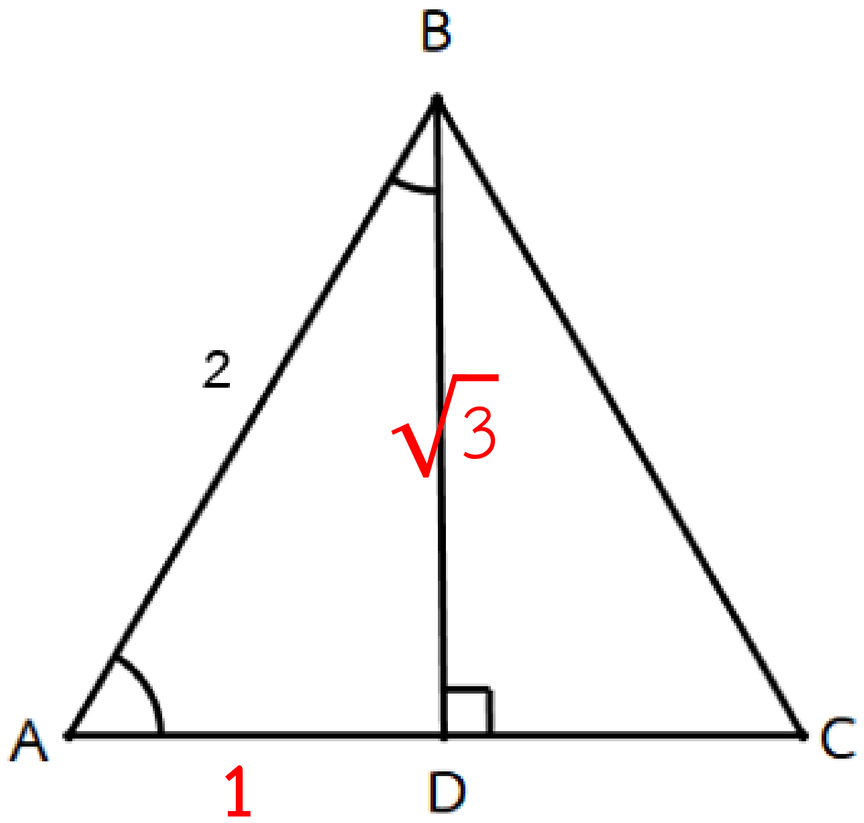


มุมที่มีขนาด 30° และ 60 °



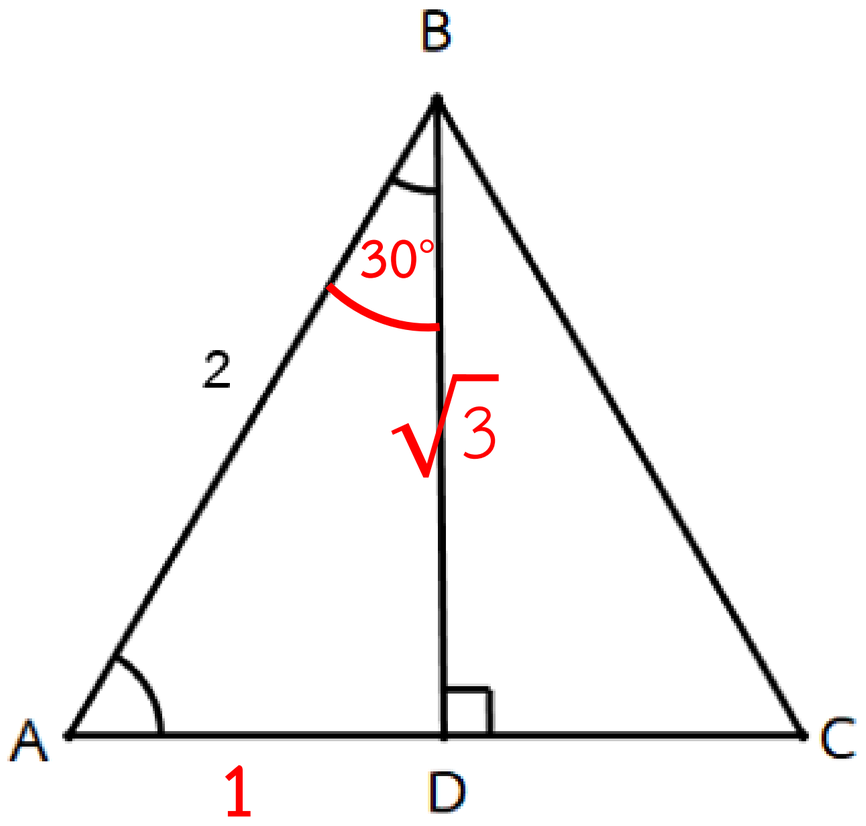
ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
1	AD = 1 หน่วย	จุด D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ AC = AB = 2 หน่วย
2	BD = $\sqrt{3}$ หน่วย	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

มุมที่มีขนาด 30° และ 60 °



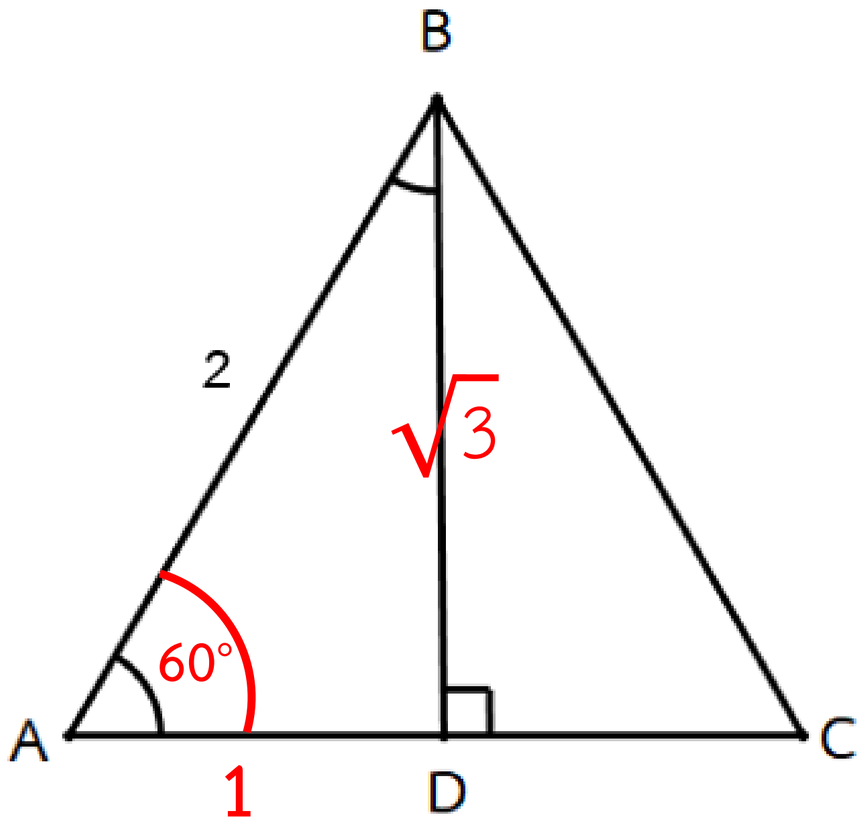
ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
3	$A\hat{B}D$ = 30 องศา	สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่ว่า “เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาตั้งฉากกับฐานจะแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว”

มุมที่มีขนาด 30° และ 60 °



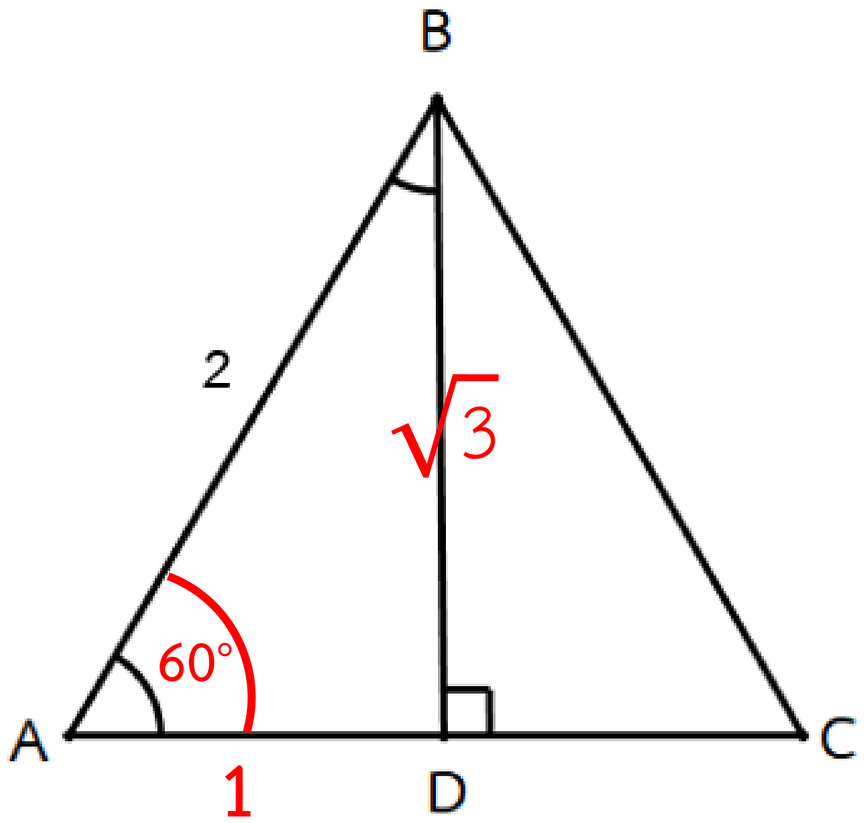
ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
4	$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 30°}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
5	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 30°}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
6	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 30°}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 30°}$

มุมที่มีขนาด 30° และ 60 °



ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
7	$\hat{A}$ = 60 องศา	มุมภายในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีขนาดเท่ากับ 60°

มุมที่มีขนาด 30° และ 60 °



ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
8	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 60°}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
9	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60°}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
10	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 60°}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60°}$

ใบกิจกรรม 2

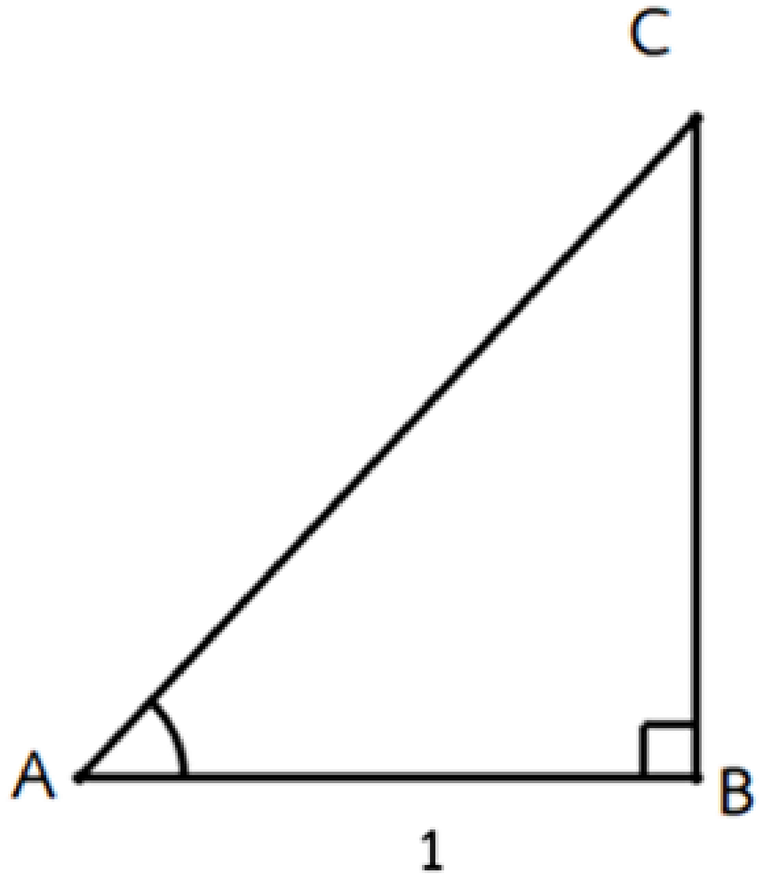
อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60°

มุมที่มีขนาด 45°

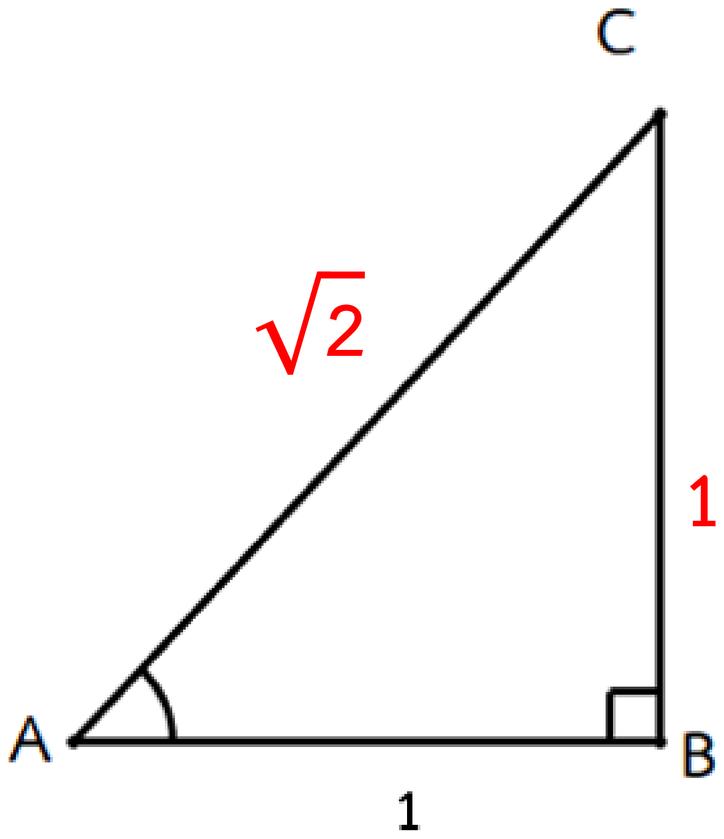
จากรูป กำหนดให้ ΔABC

เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ที่มี AB = 1 หน่วย

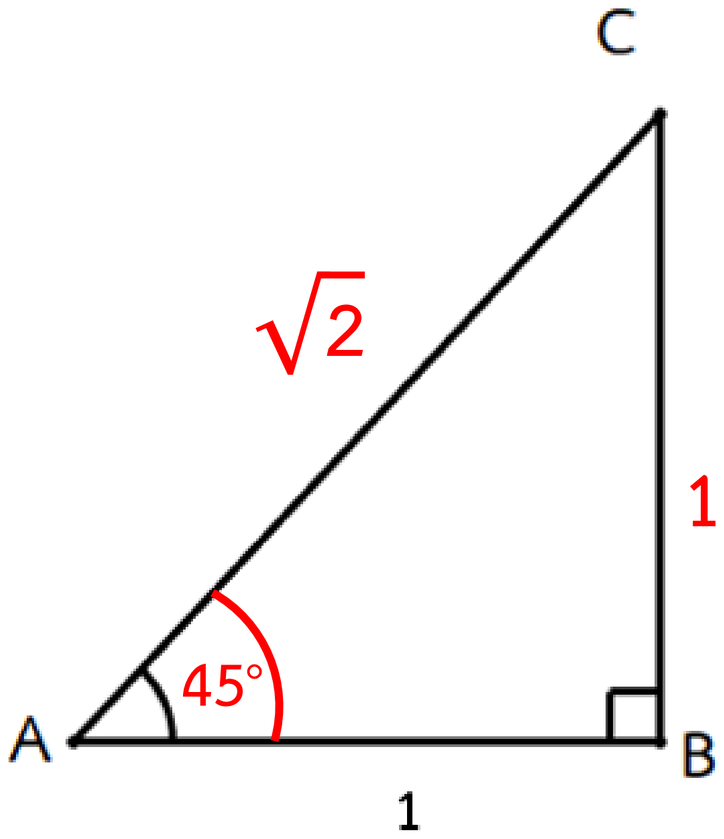


มุมที่มีขนาด 45°



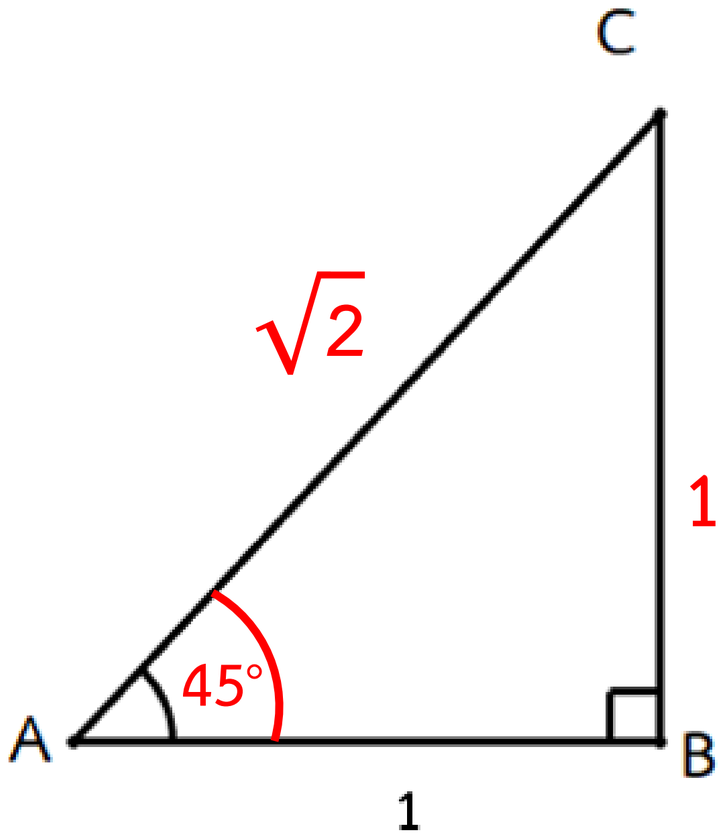
ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
1	BC = 1 หน่วย	ด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาวเท่ากัน และ AB = 1 หน่วย
2	AC = $\sqrt{2}$ หน่วย	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

มุมที่มีขนาด 45°



ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
3	$\hat{A}$ = 45 องศา	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน และ $\hat{A} + \hat{C} = 90°$

มุมที่มีขนาด 45°



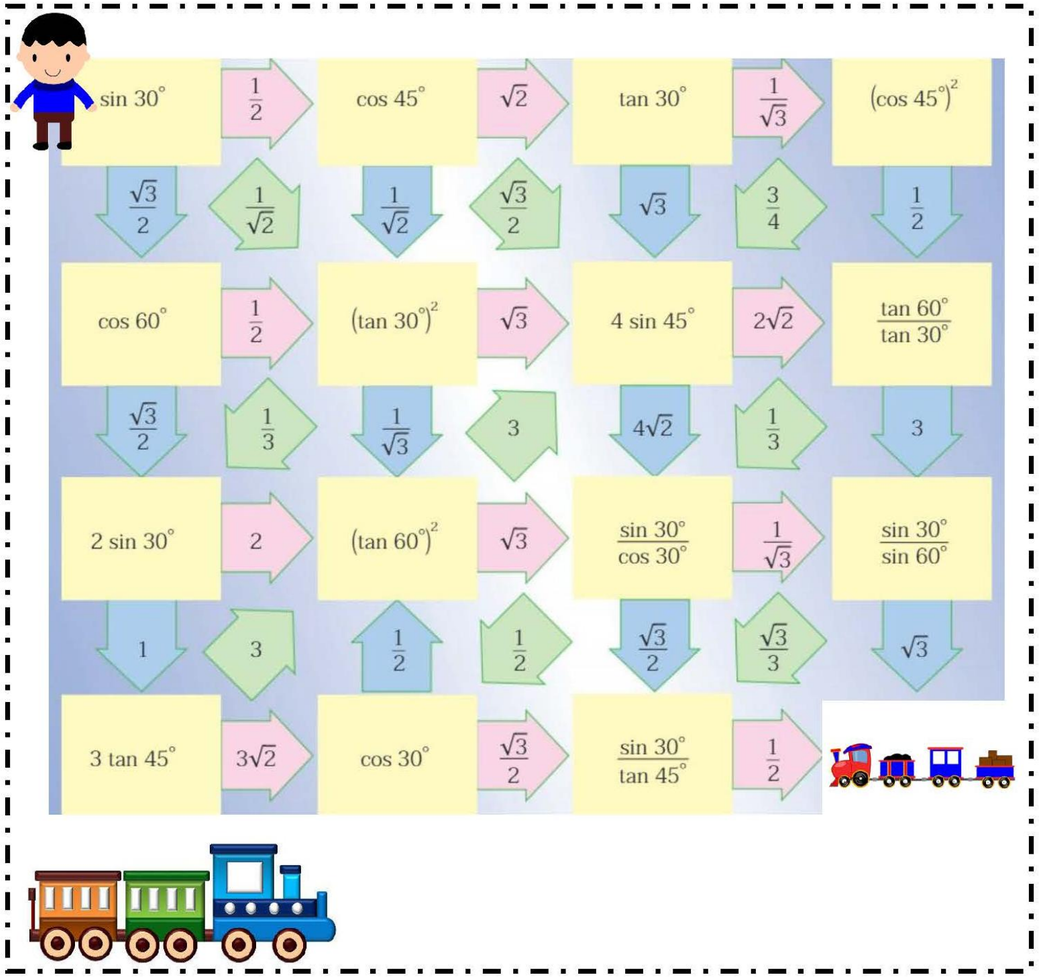
ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
4	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 45°}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
5	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 45°}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
6	$\tan 45° = 1$	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 45°}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 45°}$

อัตราส่วนตรีโกณมิติ	ขนาดของมุม A		
	30°	45°	60°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

แบบฝึกหัด 3 : อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60° (1)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนด

สถานการณ์ วาโยต้องการเส้นทางเพื่อไปสถานีรถไฟ โดยวาโยจะต้องเลือกเส้นทางที่เป็นคำตอบของกระเบื้องปริศนาที่ตนเองยืนอยู่ เพื่อไปสู่กระเบื้องปริศนาถัดไป ให้นักเรียนช่วยวาโยหาทางออกไปยังสถานีรถไฟ

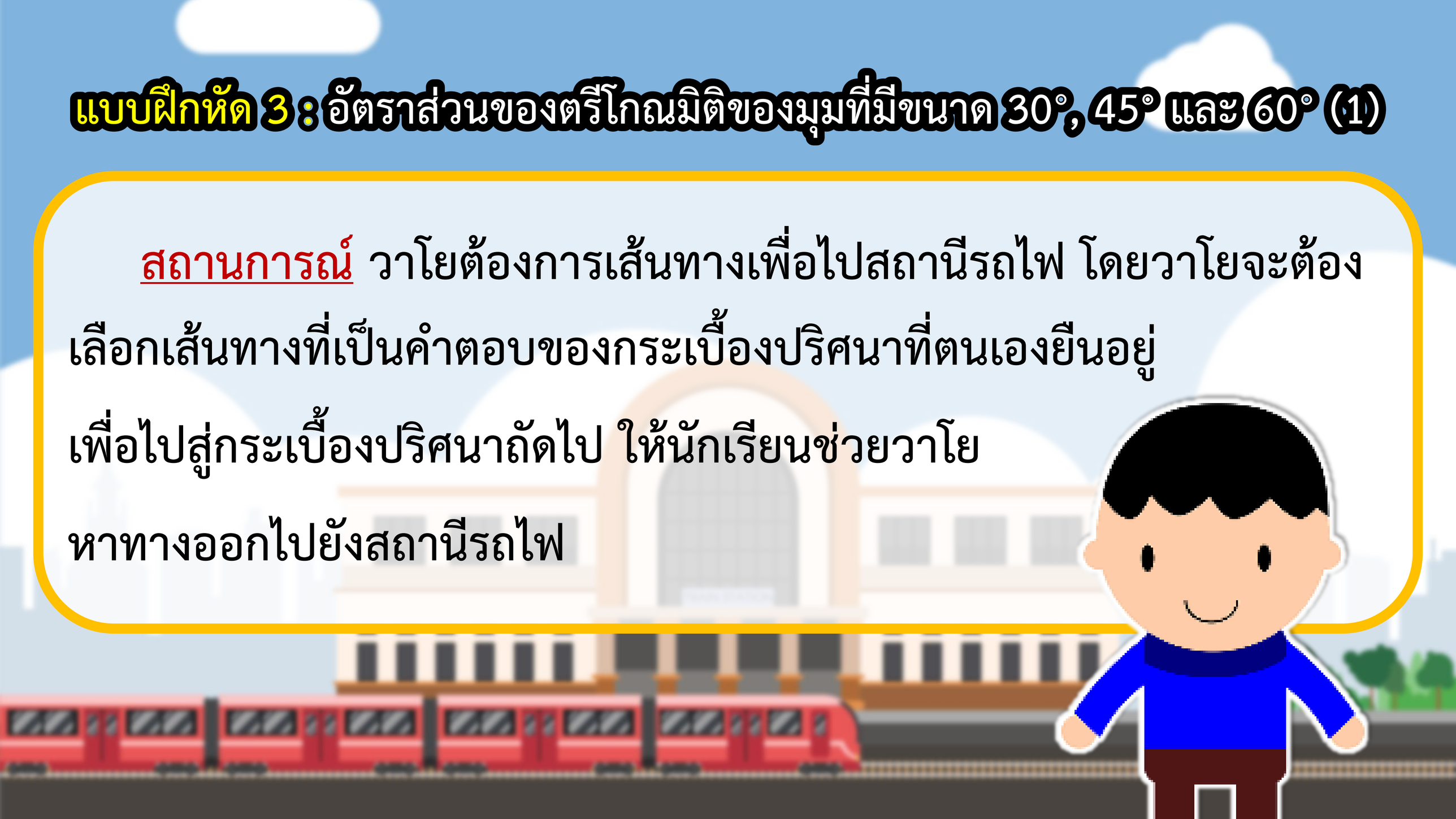


แบบฝึกหัด 3

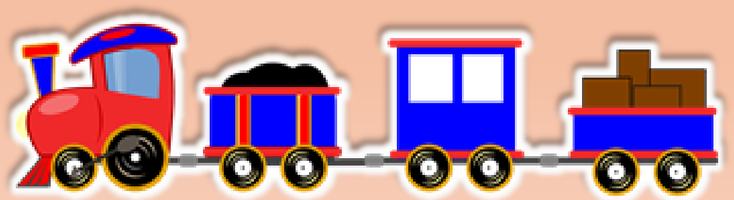
อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60° (1)

แบบฝึกหัด 3 : อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60° (1)

สถานการณ์ วาโยต้องการเส้นทางเพื่อไปสถานีรถไฟ โดยวาโยจะต้องเลือกเส้นทางที่เป็นคำตอบของกระเบื้องปริศนาที่ตนเองยืนอยู่ เพื่อไปสู่กระเบื้องปริศนาถัดไป ให้นักเรียนช่วยวาโยหาทางออกไปยังสถานีรถไฟ



$\sin 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\cos 45^\circ$	$\sqrt{2}$	$\tan 30^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\cos 45^\circ)^2$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	
$\cos 60^\circ$	$\frac{1}{2}$	$(\tan 30^\circ)^2$	$\sqrt{3}$	$4 \sin 45^\circ$	$2\sqrt{2}$	$\frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	3	$4\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$	3	
$2 \sin 30^\circ$	2	$(\tan 60^\circ)^2$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}$	
1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	
$3 \tan 45^\circ$	$3\sqrt{2}$	$\cos 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sin 30^\circ}{\tan 45^\circ}$	$\frac{1}{2}$		



ใบกิจกรรม 3 : BINGO TRIGONOMETRY
หน่วยการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกค่าที่กำหนดให้ที่แตกต่างกัน ไปใส่ในตาราง BINGO ให้ครบทั้ง 9 ช่อง และให้นักเรียนกากบาทในช่องที่มีค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่มีค่าเท่ากับสลากที่สุ่มได้

sin 30°	cos 30°	tan 30°	sin 45°	cos 45°	tan 45°	sin 60°	cos 60°
tan 60°	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	

ตาราง BINGO

ใบกิจกรรม 3

อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60°

ใบกิจกรรม 3 : BINGO TRIGONOMETRY

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกค่าที่กำหนดให้ที่แตกต่างกันไปใส่ในตาราง BINGO ให้ครบทั้ง 9 ช่อง และให้นักเรียนกากบาทในช่องที่มีค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่มีค่าเท่ากับสลากที่สุ่มได้

BINGO TRIGONOMETRY

$\sin 30°$	$\cos 30°$
$\tan 30°$	$\sin 45°$
$\cos 45°$	$\tan 45°$
$\sin 60°$	$\cos 60°$
$\tan 60°$	1

$$\sqrt{3} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ $\sin 30° - \cos 60°$

วิธีทำ จาก $\sin 30° - \cos 60°$ = _____

= _____

ตัวอย่างที่ 2

กำหนด $(\tan 45^\circ)^2 - x = \cos 60^\circ$ จงหาค่า x

วิธีทำ จาก $(\tan 45^\circ)^2 - x = \cos 60^\circ$

แบบฝึกหัด 4 : อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60° (2)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. จงหาผลลัพธ์

1) $(\sin 60°)(\tan 30°)$ = _____

= _____

= _____

= _____

2) $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{2}\cos 45° + \sqrt{2}\sin 45°$ = _____

= _____

= _____

= _____

3) $\frac{1}{(\cos 30°)^2} - (\tan 30°)^2$ = _____

= _____

= _____

= _____

2. จงหาค่า x

1) $x\,(\sin 30°)(\cos 60°) = 4$

_____

_____

_____

_____

2) $x\tan 45° = \sin 30°\cos 30°$

_____

_____

แบบฝึกหัด 4

อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60° (2)

1. จงหาผลลัพธ์

1) $(\sin 60°)(\tan 30°) =$ _____

_____

2) $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{2}\cos 45° + \sqrt{2}\sin 45° =$ _____

_____

3) $\dfrac{1}{(\cos 30°)^2} - (\tan 30°)^2 =$ _____

_____

2. จงหาค่า x

1) $x\,(\sin 30°)(\cos 60°) = 4$

2) $x\,\tan 45° = \sin 30°\,\cos 30°$

เฉลย

แบบฝึกหัด 4

อัตราส่วนของตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30°, 45° และ 60° (2)

1. จงหาผลลัพธ์

1) $\sin 60° \cdot \tan 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{1}{2}$

2) $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{2}\cos 45° + \sqrt{2}\sin 45°$

$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2}$

$= \frac{3}{2} + 2$

$= \frac{7}{2}$

1. จงหาผลลัพธ์

3) $\dfrac{1}{(\cos 30^\circ)^2} - (\tan 30^\circ)^2$

$= \dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= \dfrac{1}{\frac{3}{4}} - \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}$

$= 1$

2. จงหาค่า x

1) $x(\sin 30°)(\cos 60°) = 4$

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$x \cdot \frac{1}{4} = 4$$

$$x = 16$$

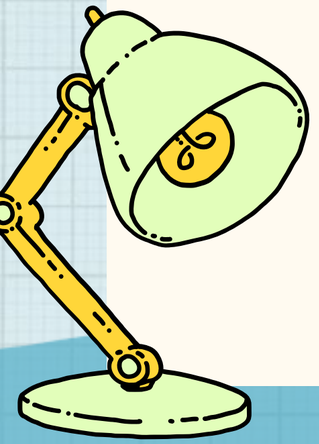
2) $x \tan 45° = \sin 30° \cos 30°$

$$x \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

สรุปบทเรียน

การนำความรู้เกี่ยวกับค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60° ในการแก้ปัญหานักเรียนจะต้องแทนค่า คำนวณหาคำตอบหรือแก้สมการหาคำตอบเพื่อแก้ปัญหาที่โจทย์ต้องการ

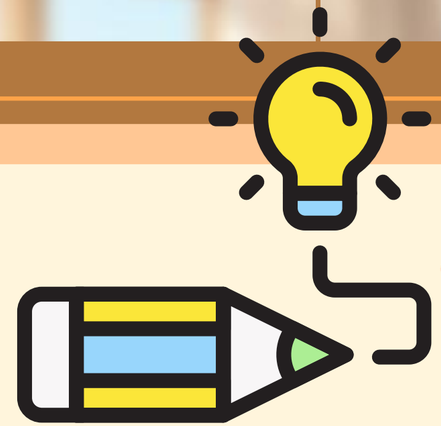


บทเรียนครั้งต่อไป

การนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ (1)

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

สิ่งที่ต้องเตรียม



แบบฝึกหัด 5 : การหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (1)

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th