

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค22102 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการ
ของรูปสามเหลี่ยม (2)

ครูผู้สอน ครูอชราวุธ ไชยมงคล



หน่วยการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการ
ของรูปสามเหลี่ยม (2)





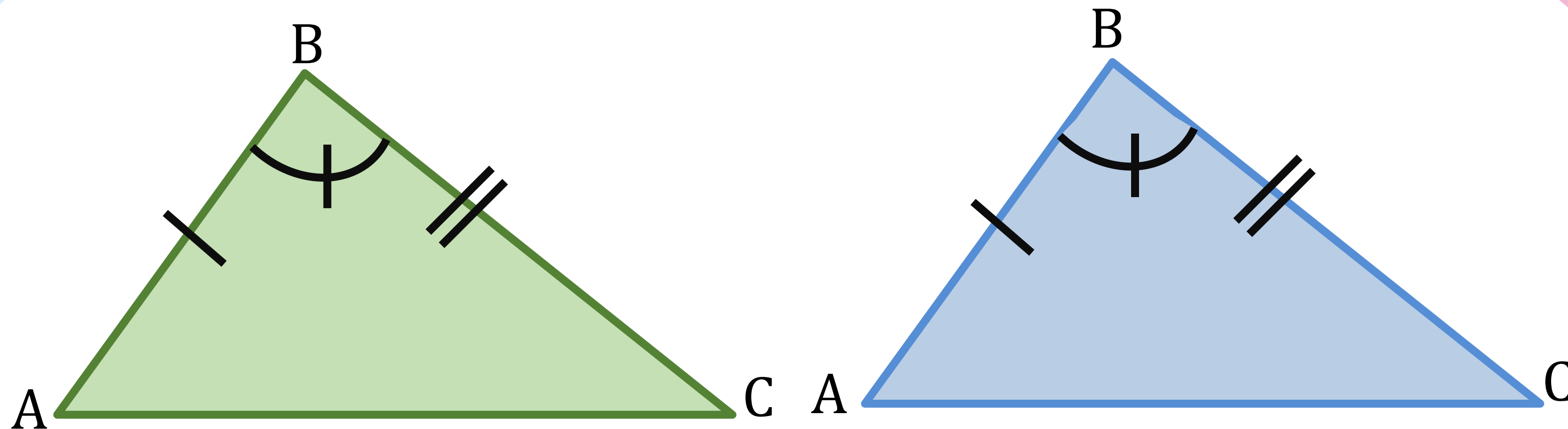
จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถวิเคราะห์ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ
ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป
สามารถนำมาใช้อ้างอิงในการพิสูจน์สมบัติที่สำคัญ
บางประการของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมได้





พิจารณารูปสามเหลี่ยม

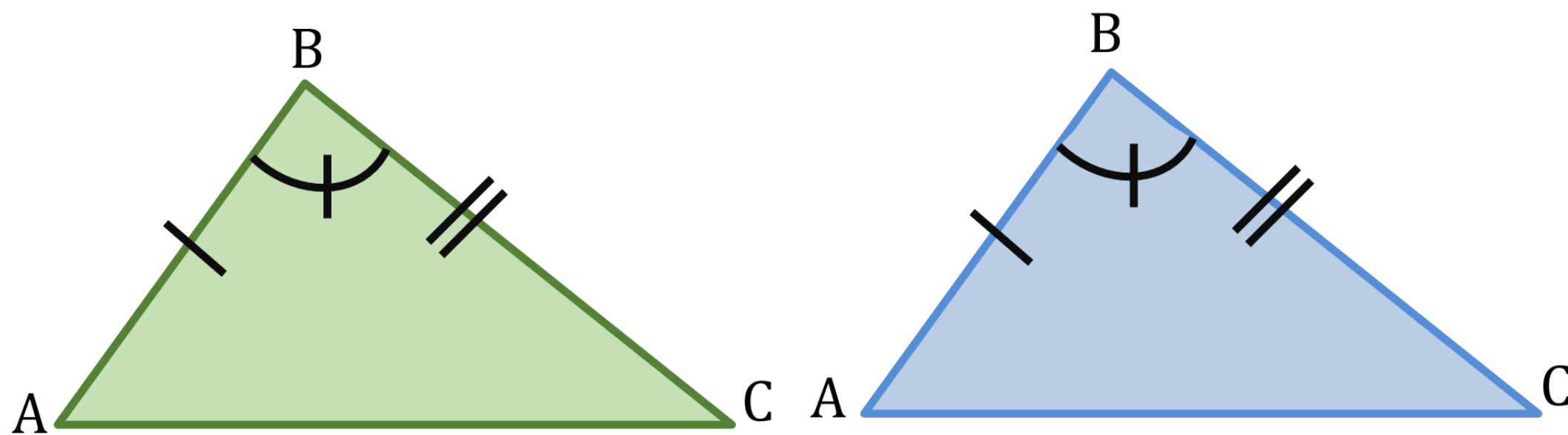


ด้าน-มุม-ด้าน



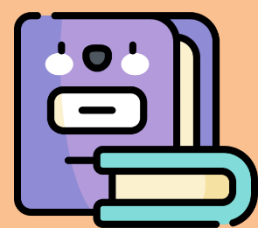
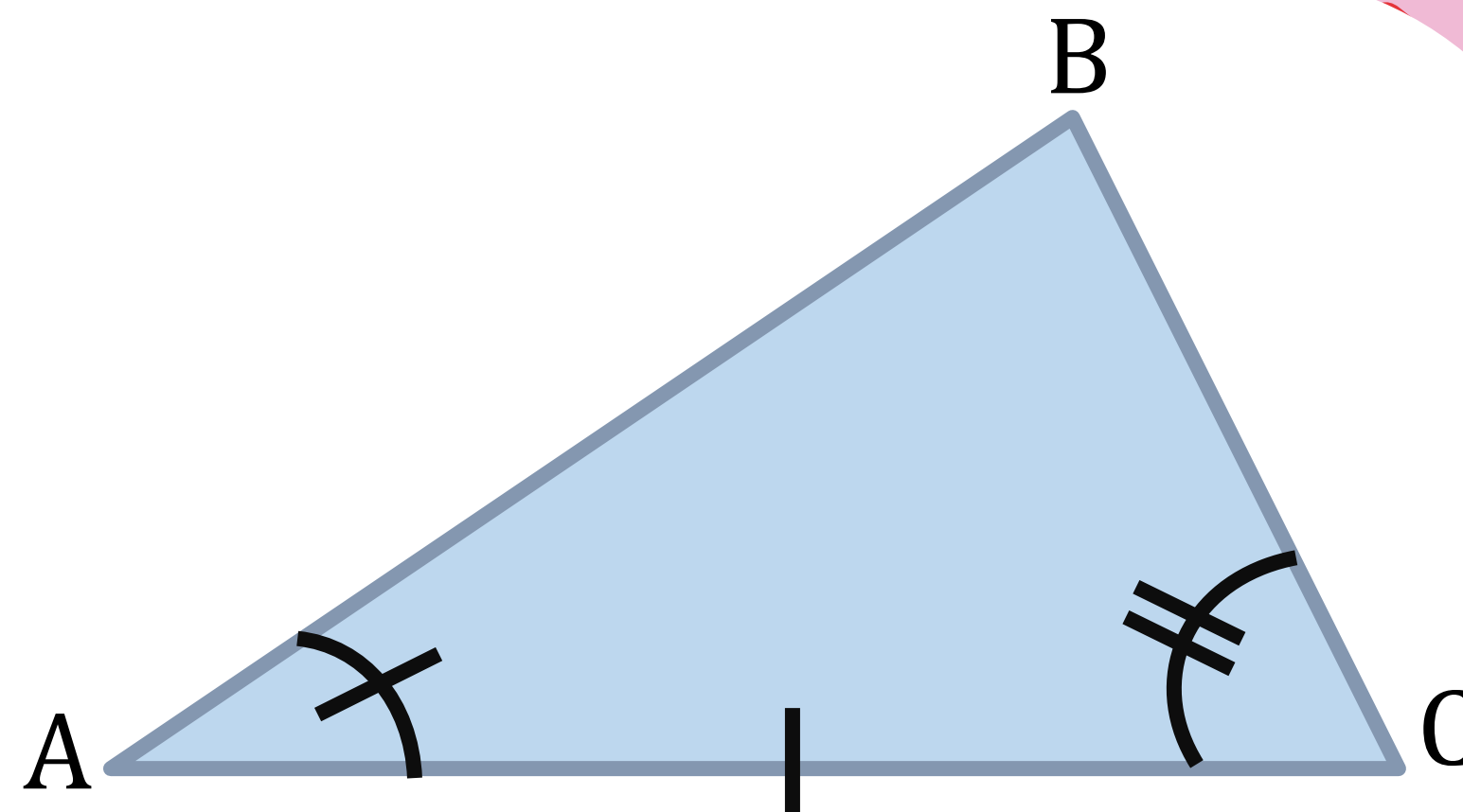
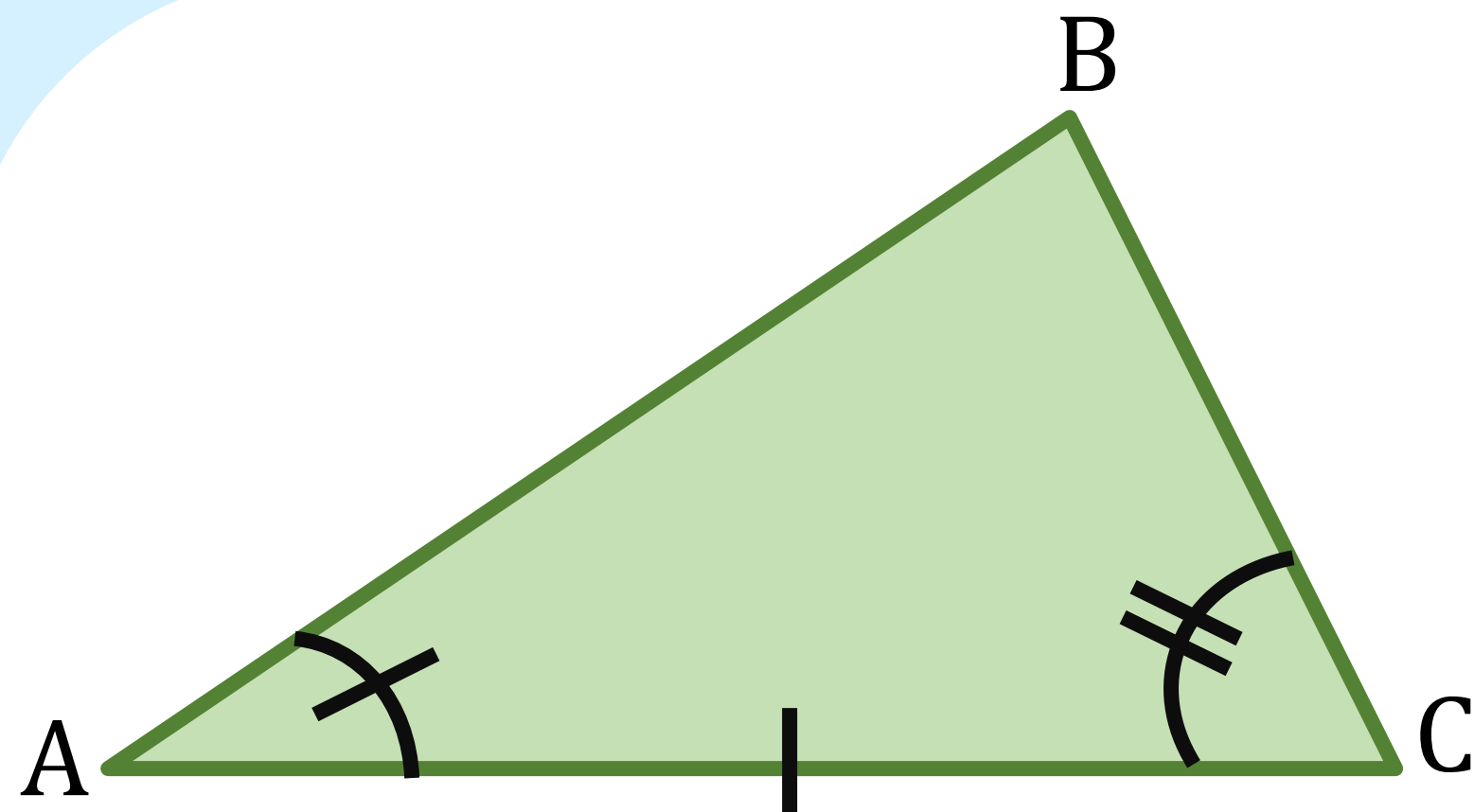
ด้าน-มุม-ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูป มีด้านยาวเท่ากันสองคู่
และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

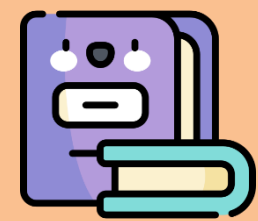




พิจารณารูปสามเหลี่ยม

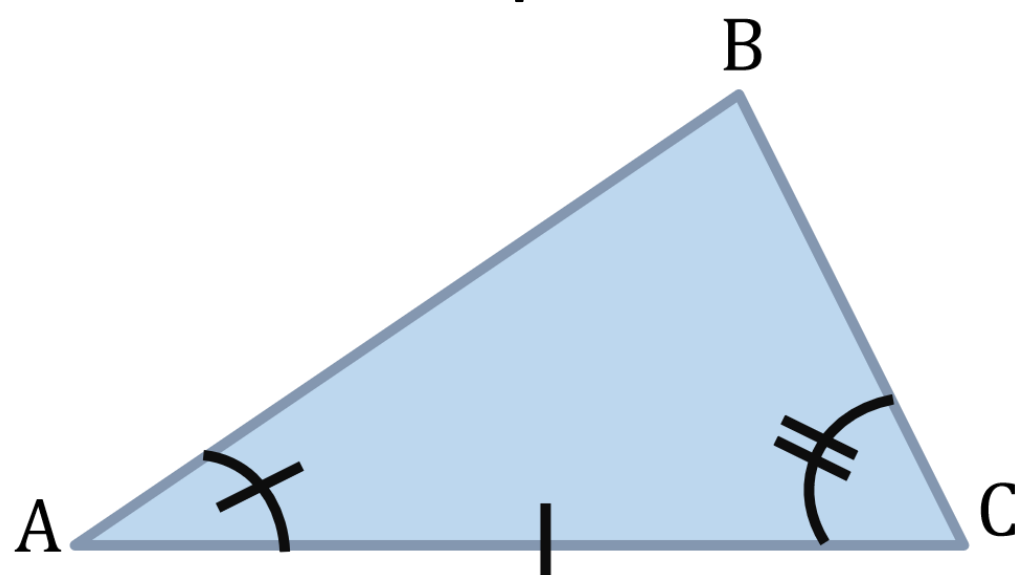
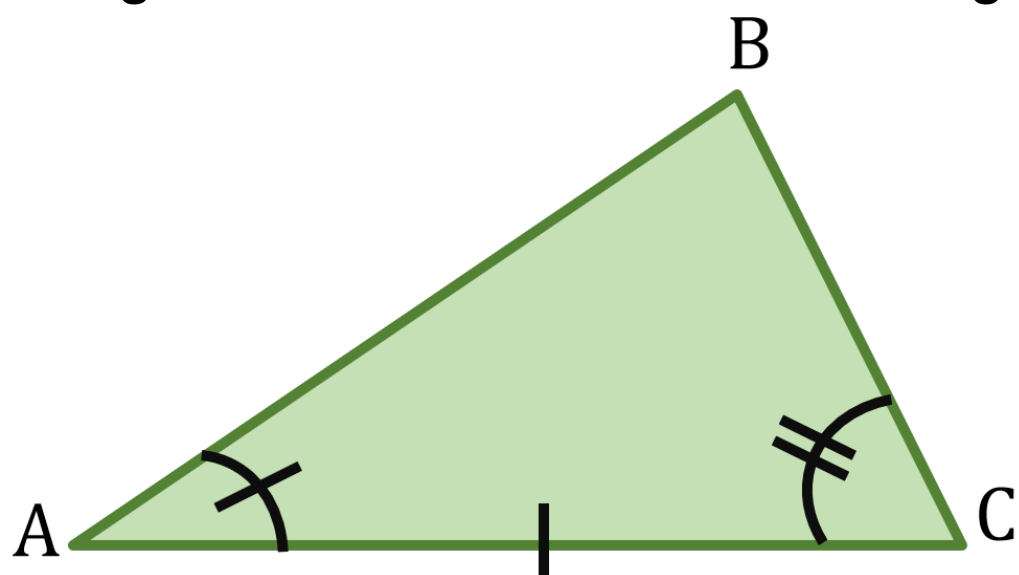


มุม-ด้าน-มุม



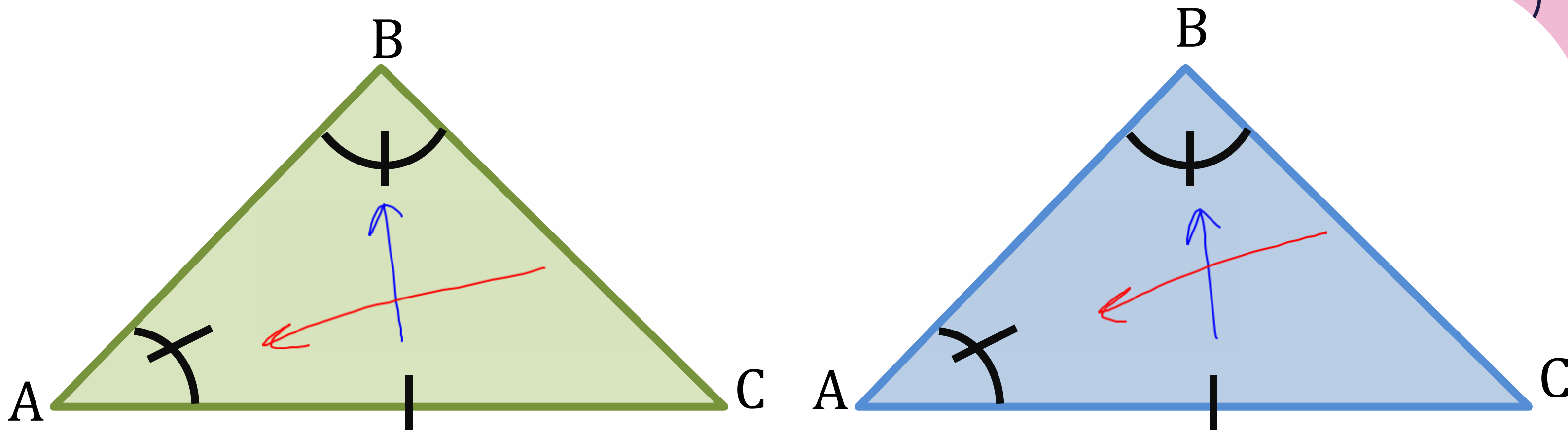
มุม-ด้าน-มุม

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่
และมีด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ





พิจารณารูปสามเหลี่ยม

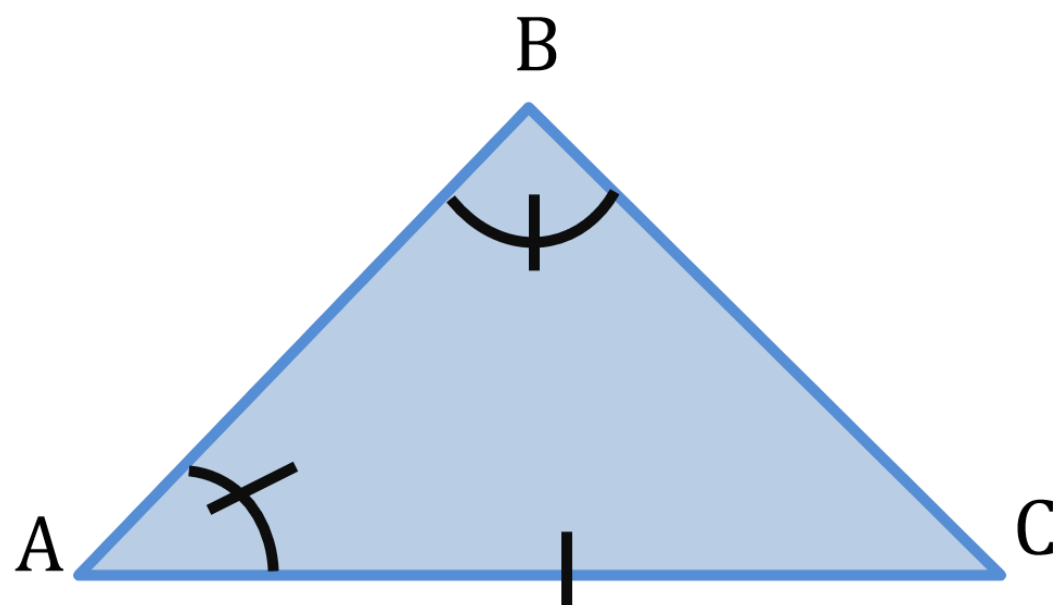
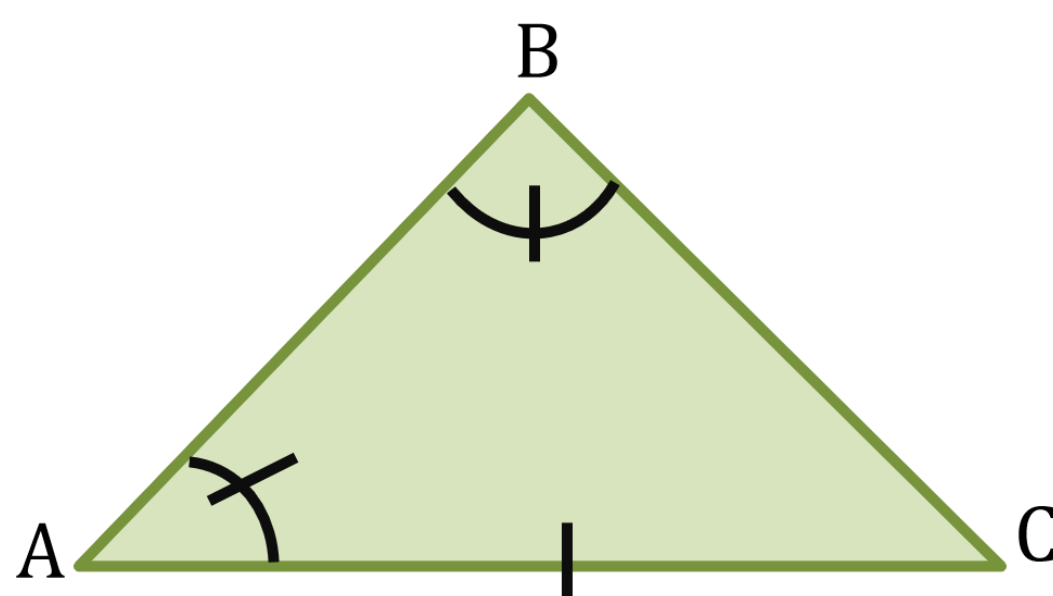


มุม-มุม-ด้าน



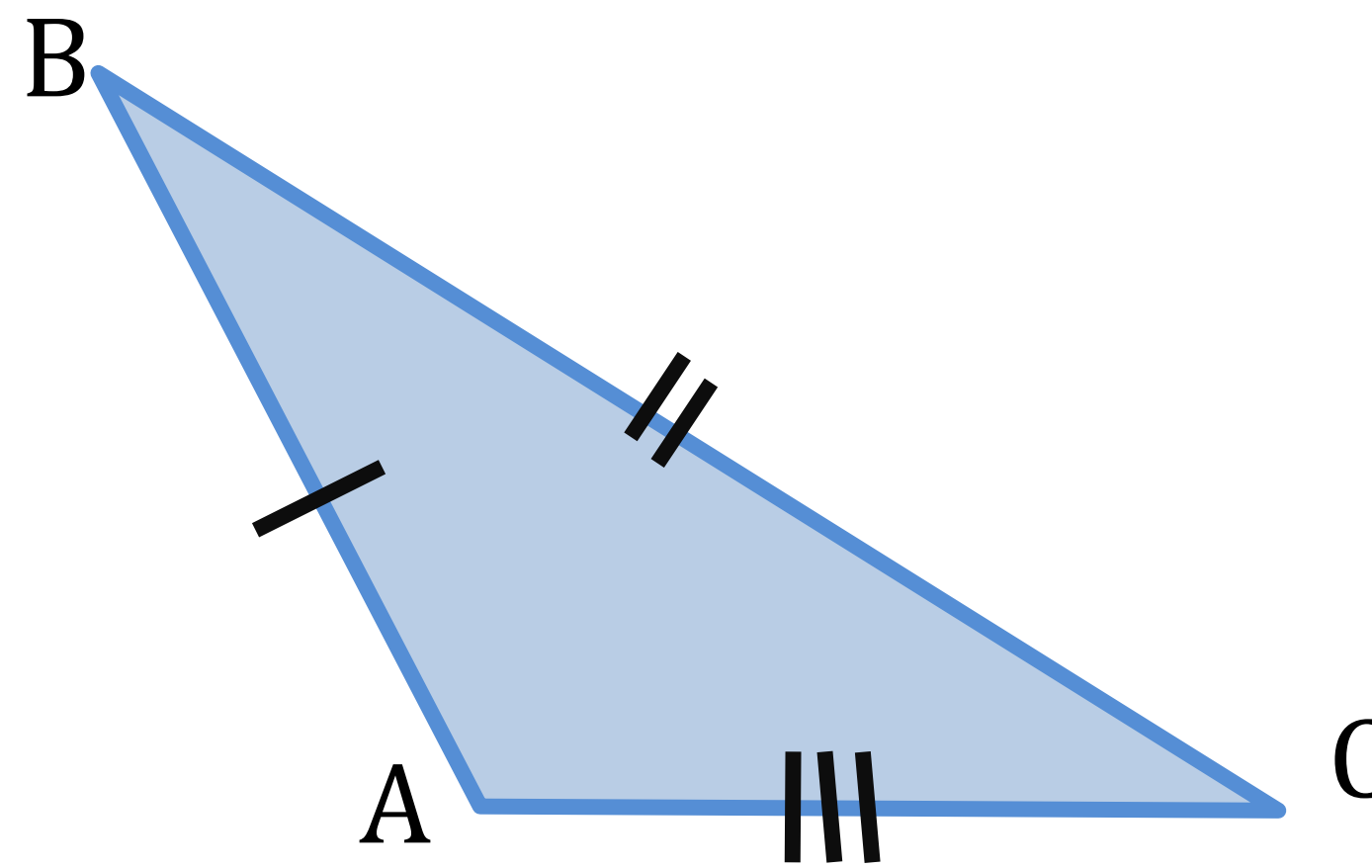
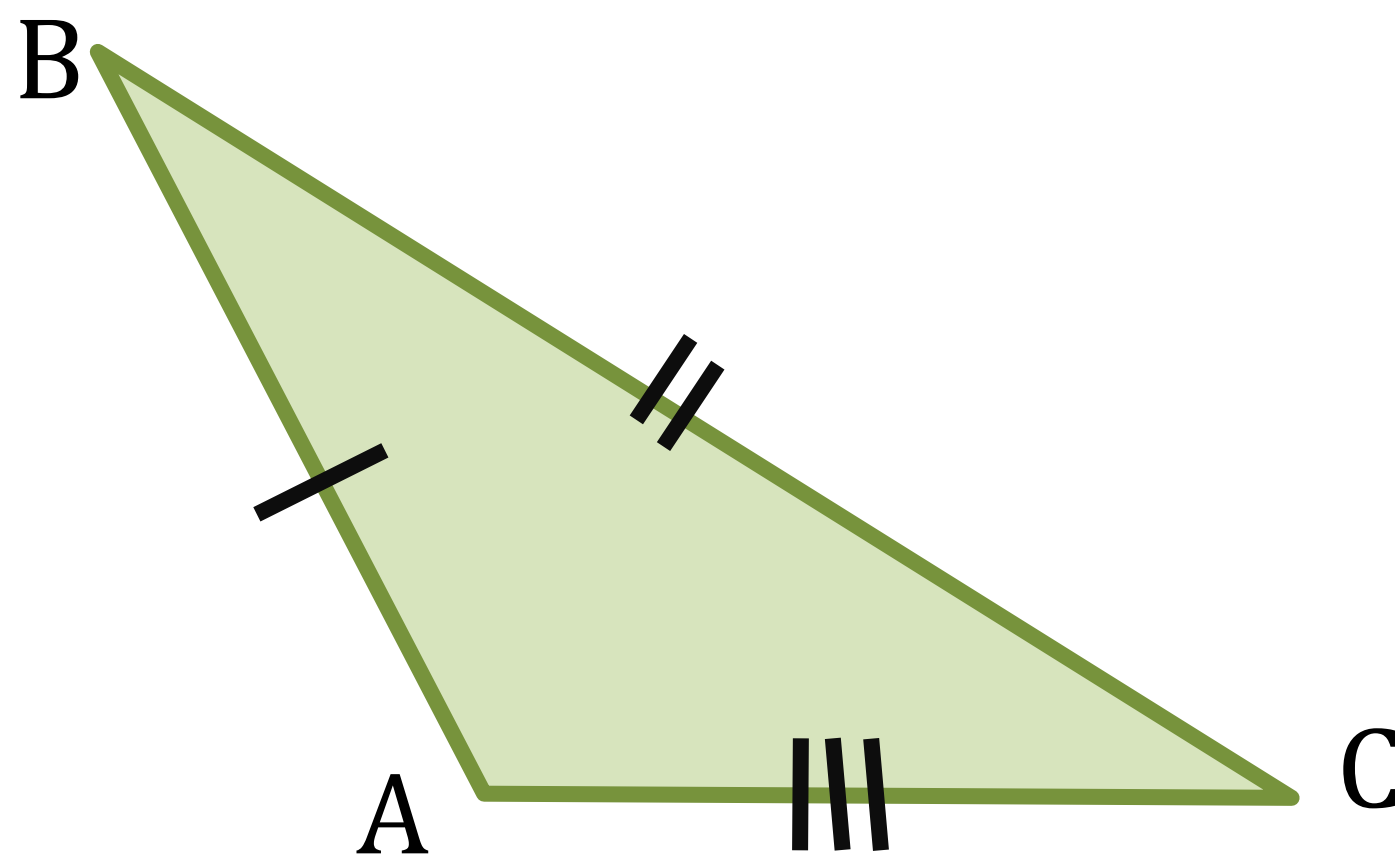
มุม-มุม-ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่
และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน
ยาวเท่ากันหนึ่งคู่





พิจารณารูปสามเหลี่ยม

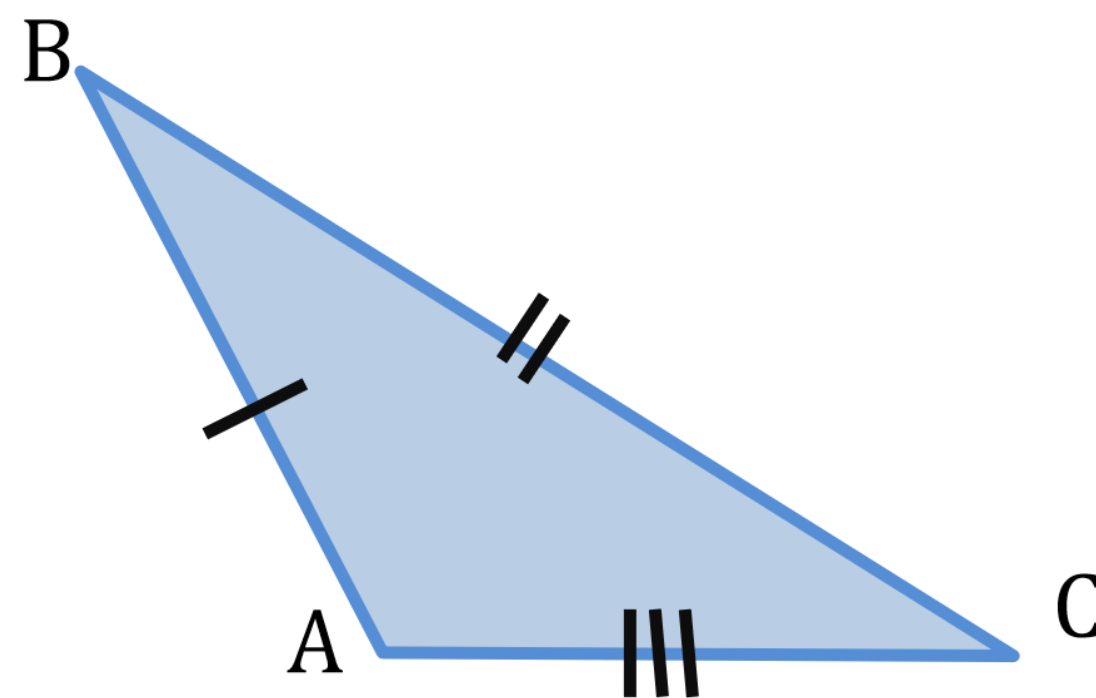
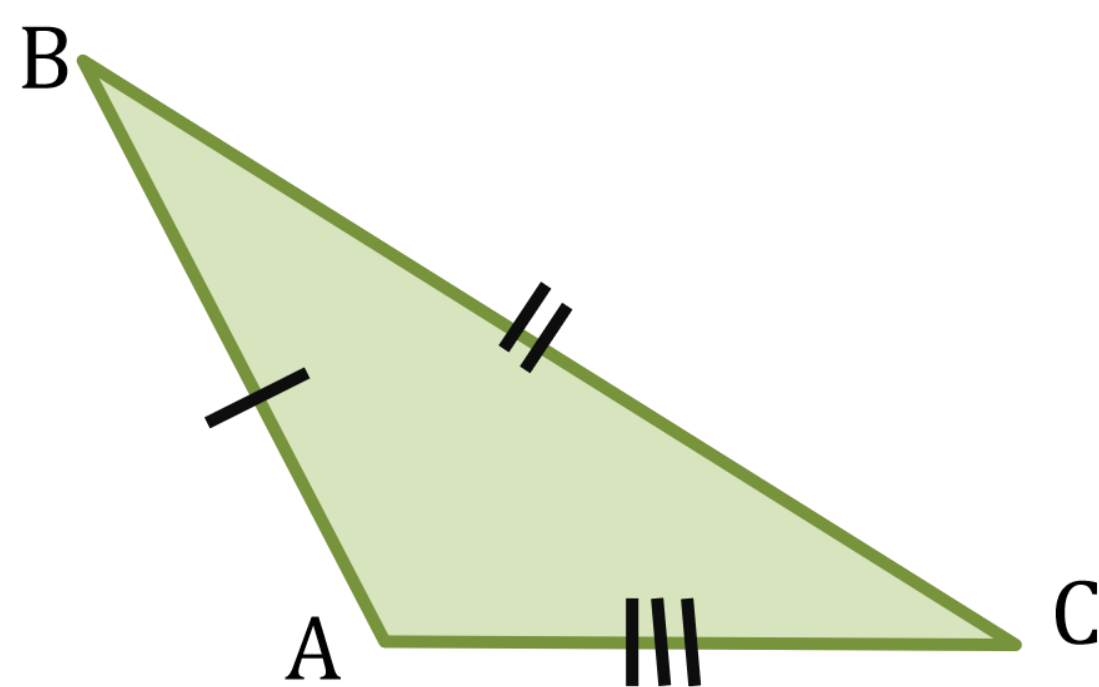


ด้าน-ด้าน-ด้าน



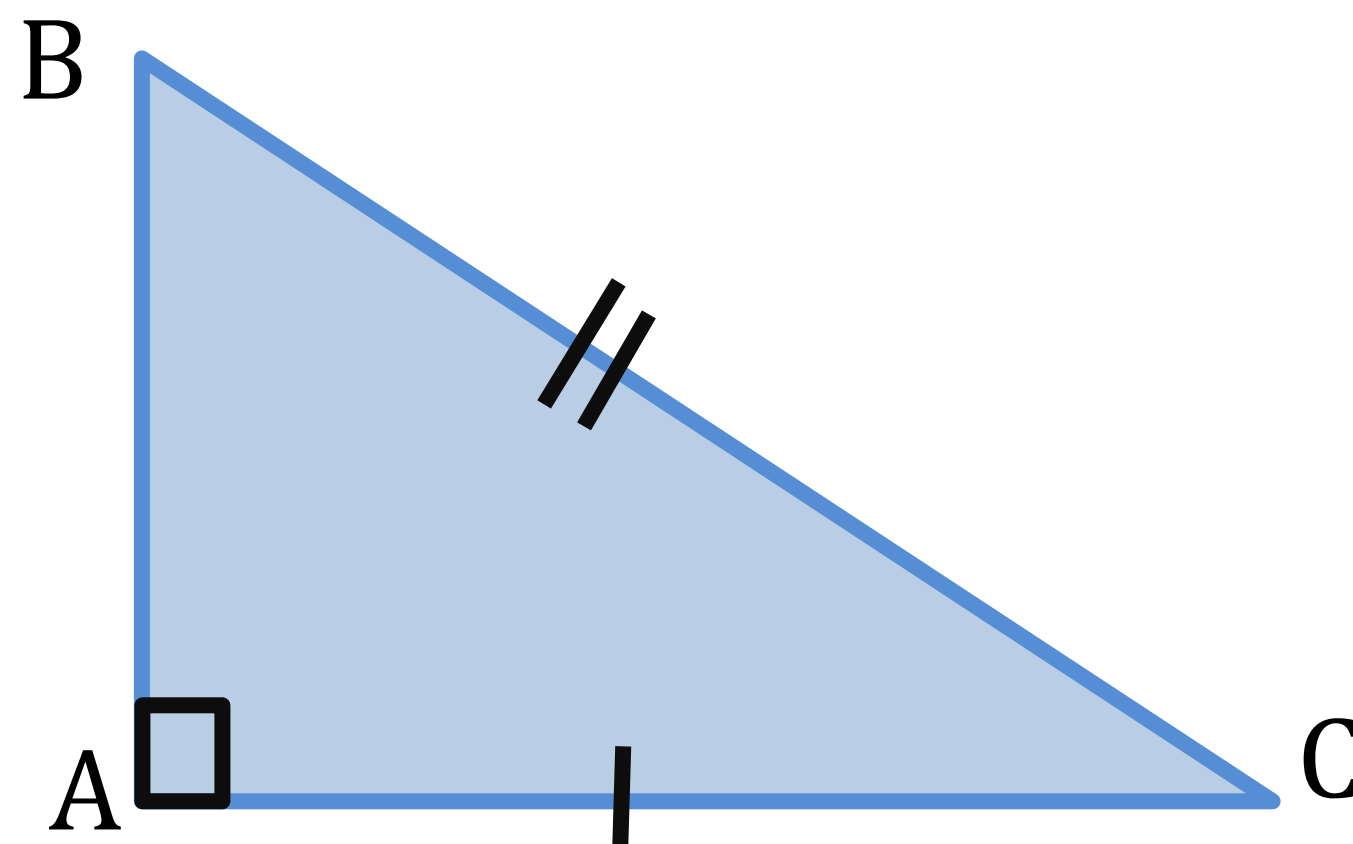
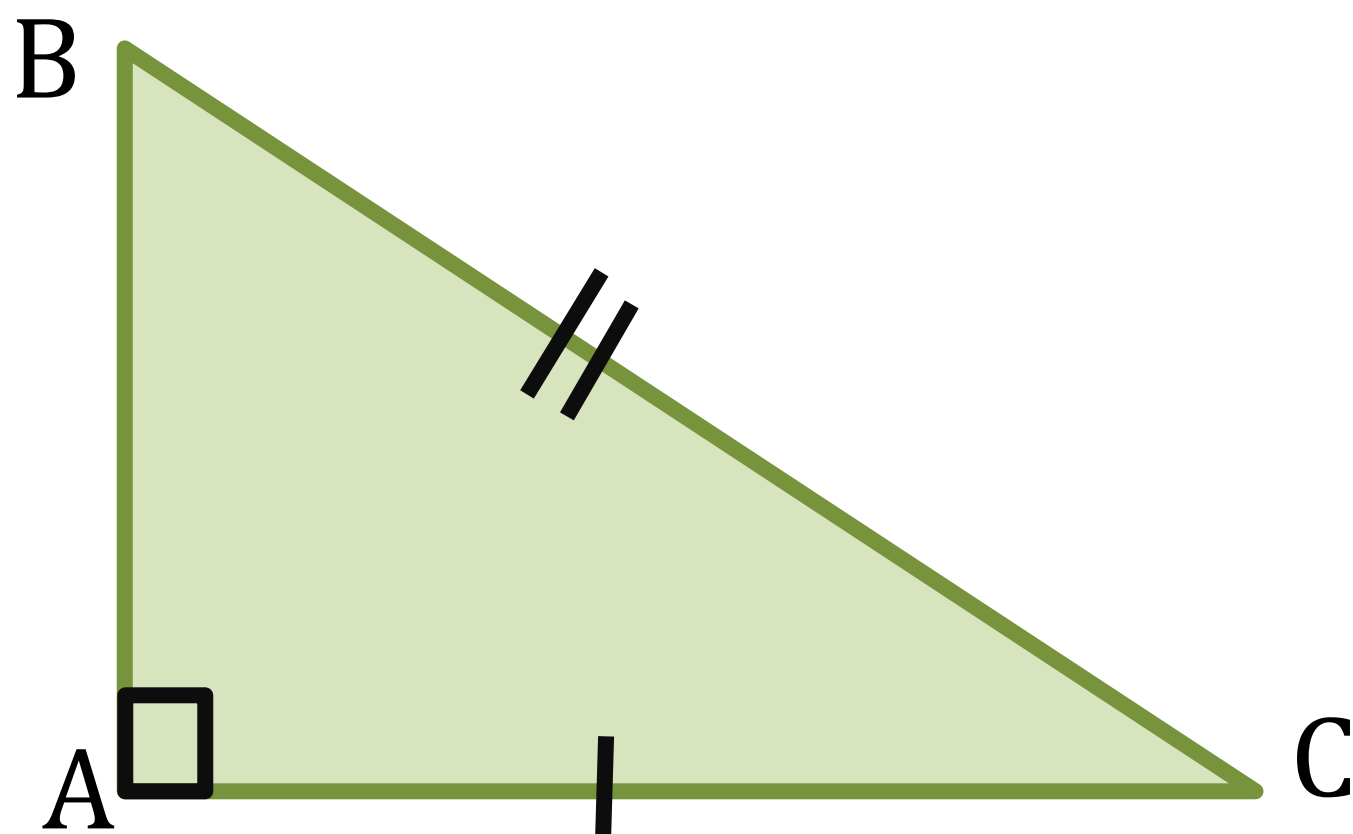
ด้าน-ด้าน-ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ





พิจารณารูปสามเหลี่ยม

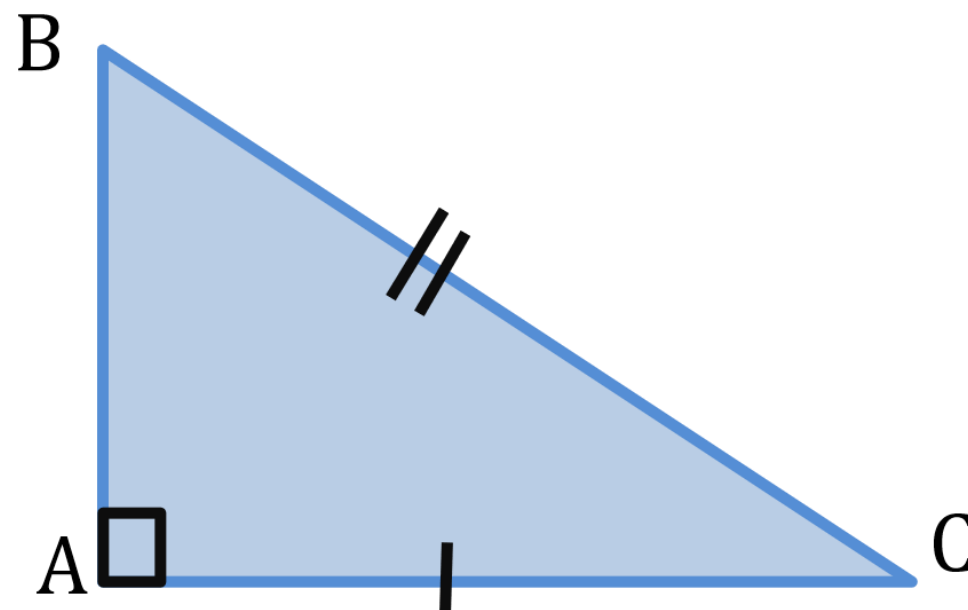
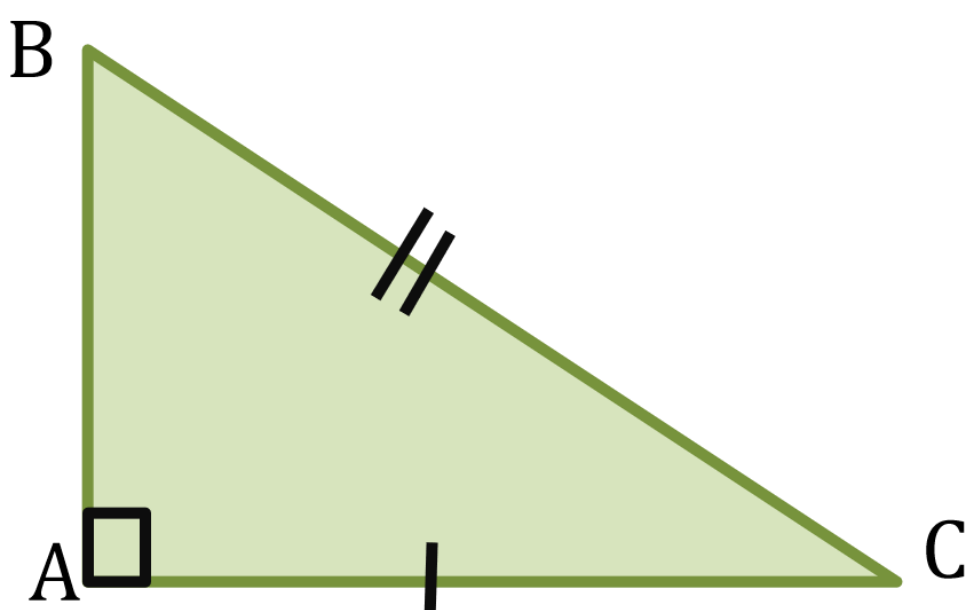


ฉาก-ด้าน-ด้าน



ฉาก-ด้าน-ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกหนึ่งคู่ยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

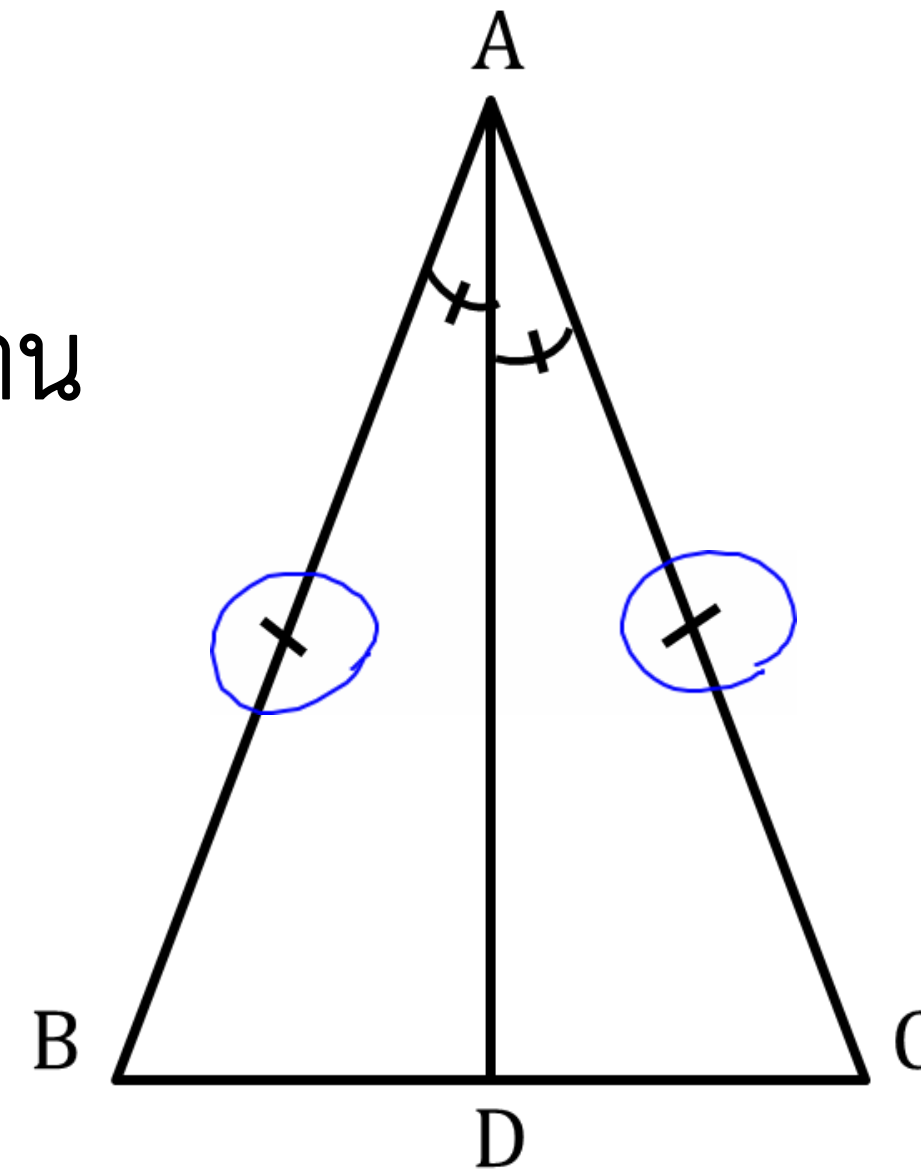




สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

1. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

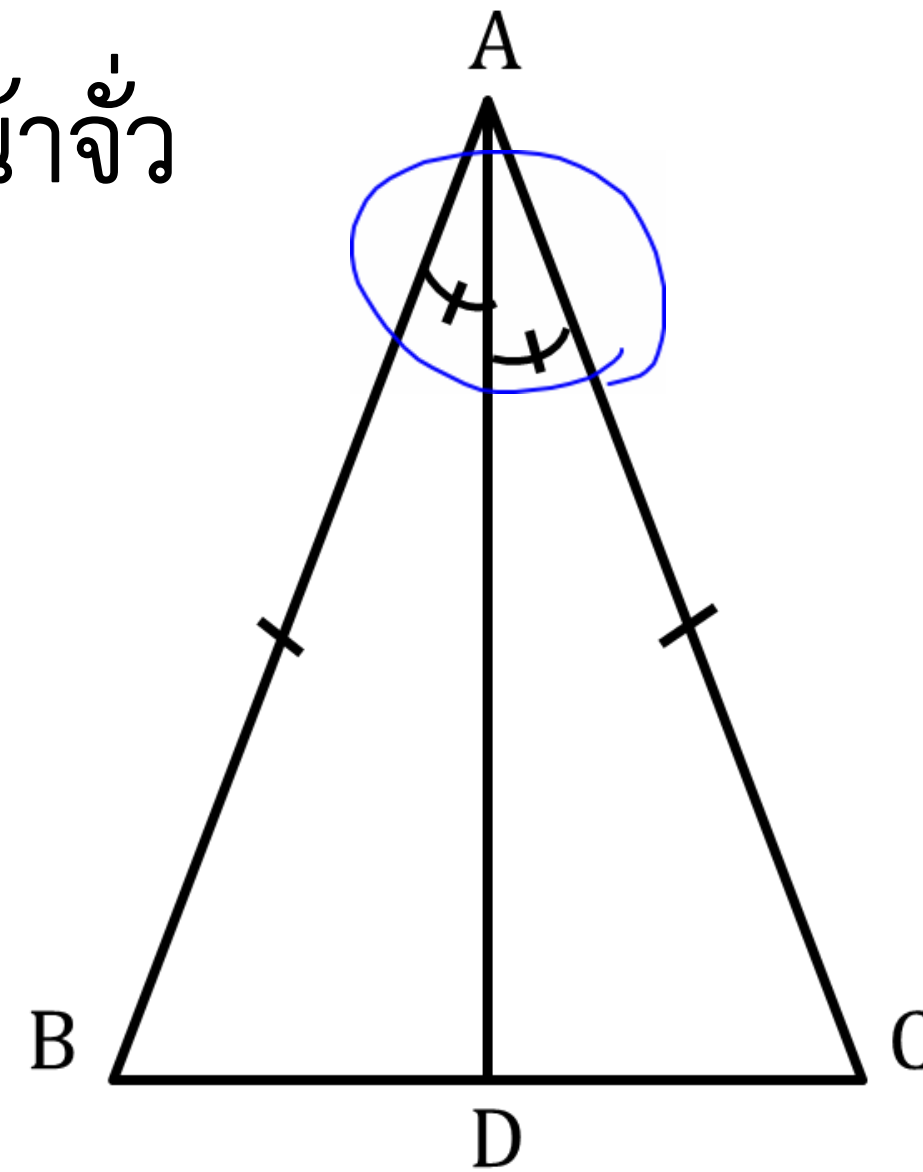
คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน





สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

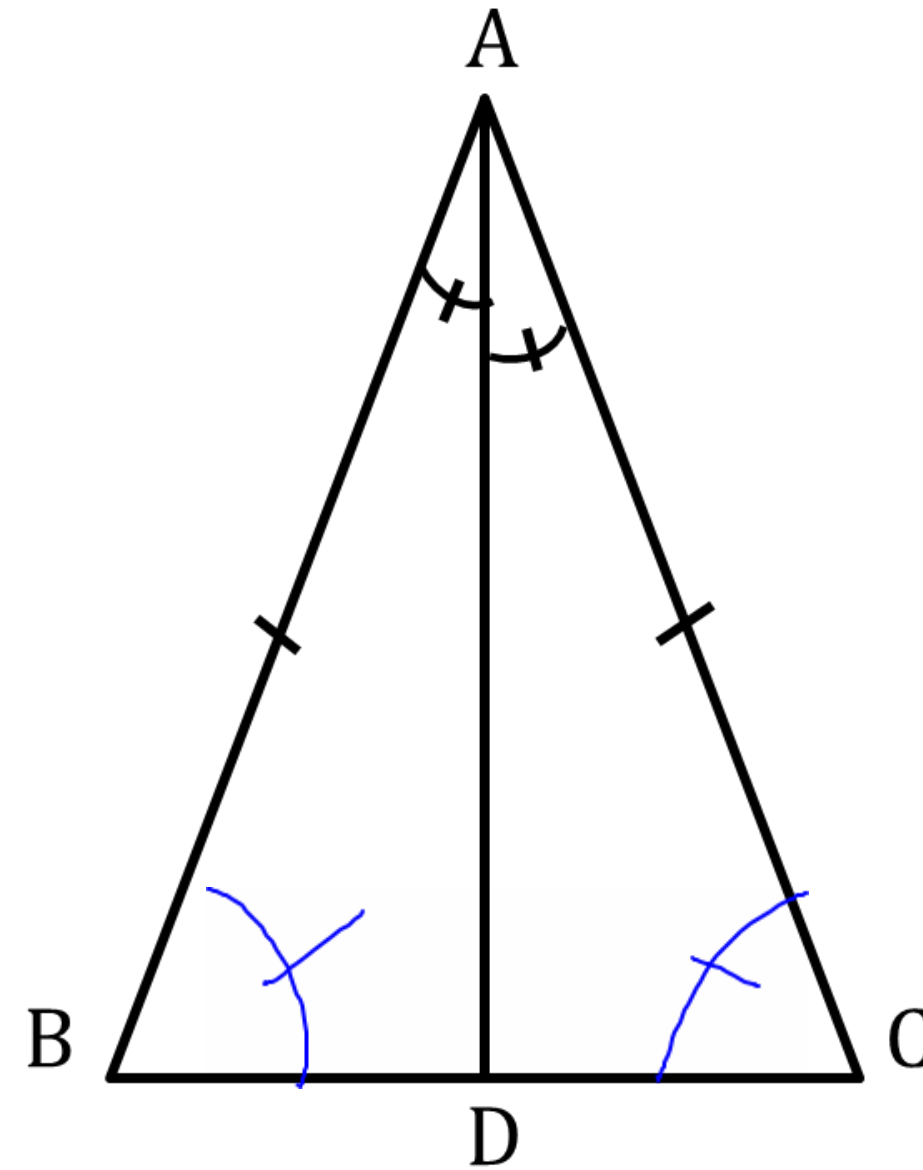
2. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็น
รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ





สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

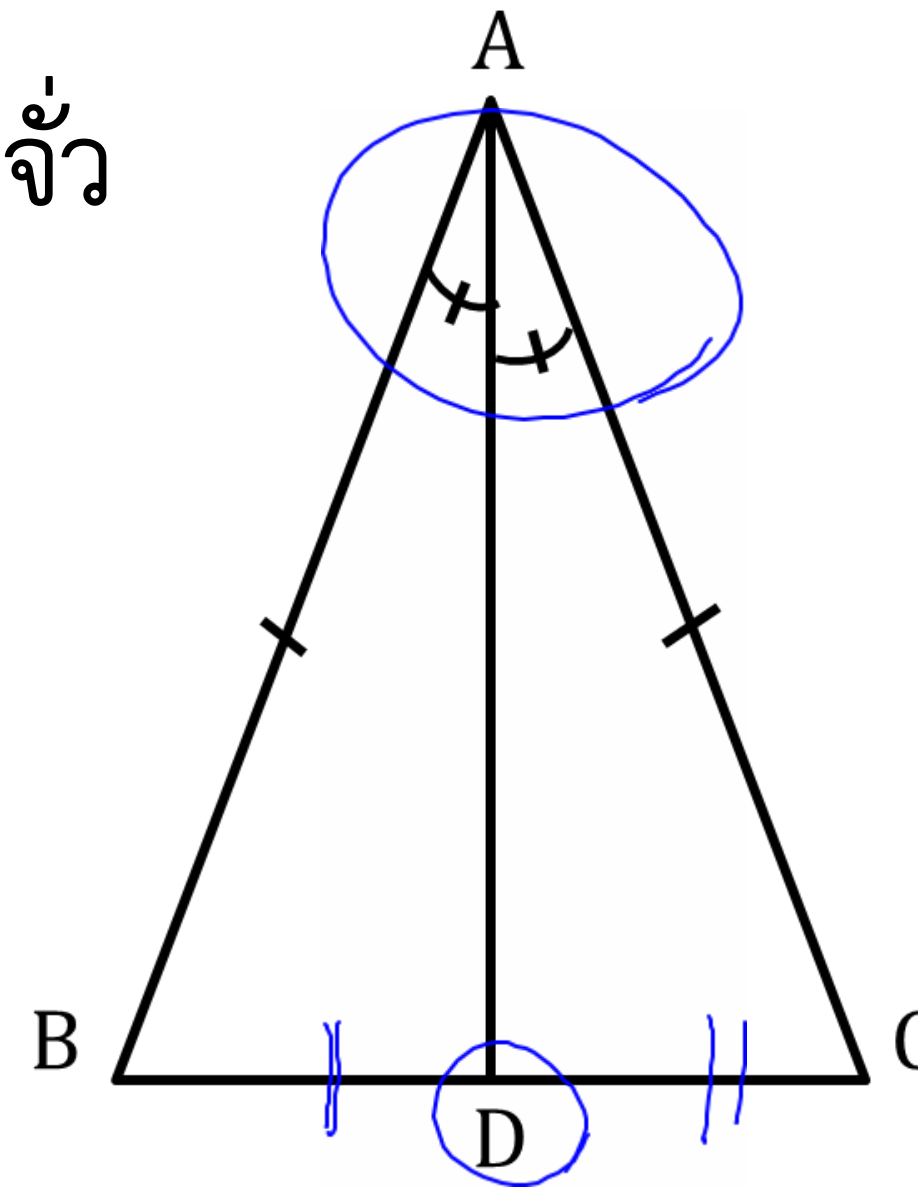
3. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
มีขนาดเท่ากัน





สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

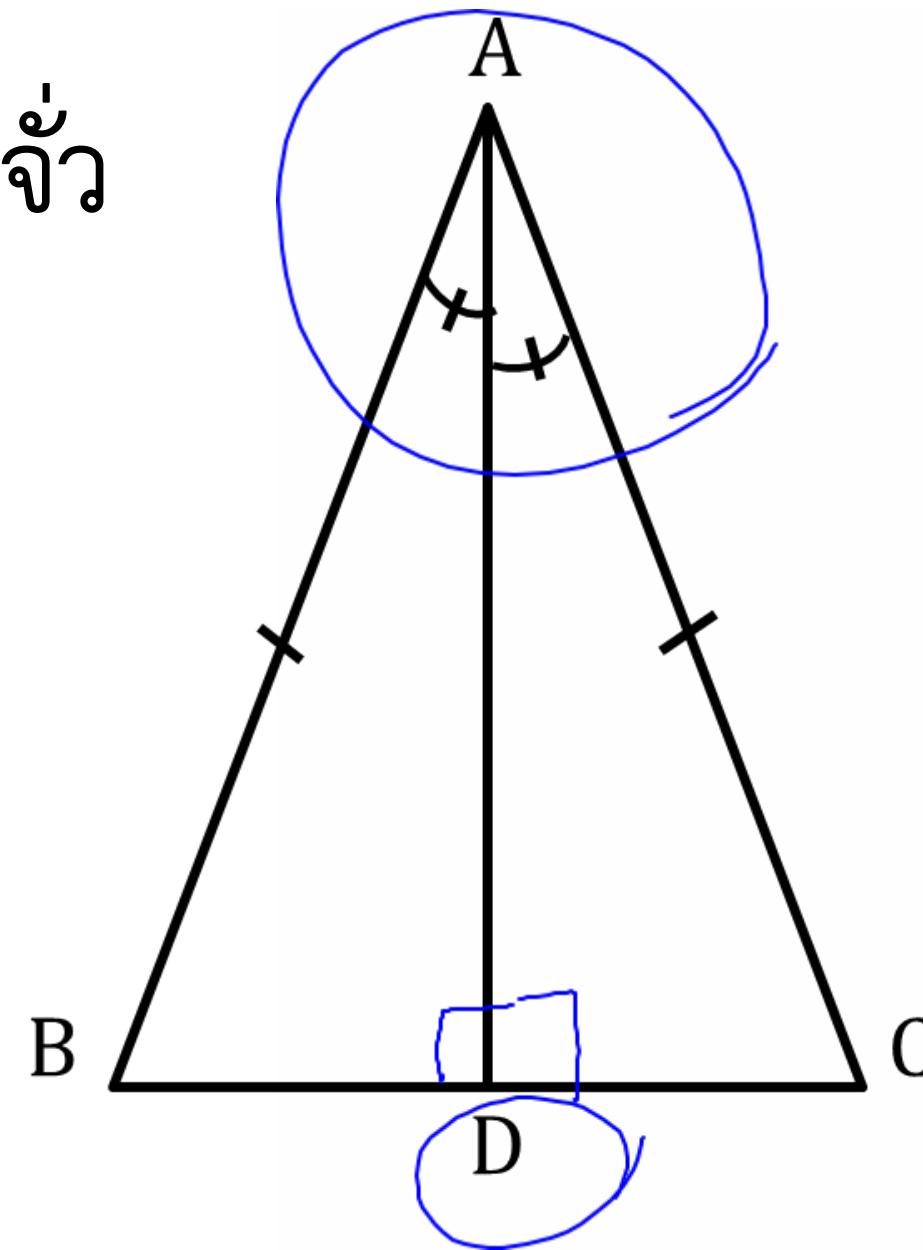
4. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
จะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว





สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

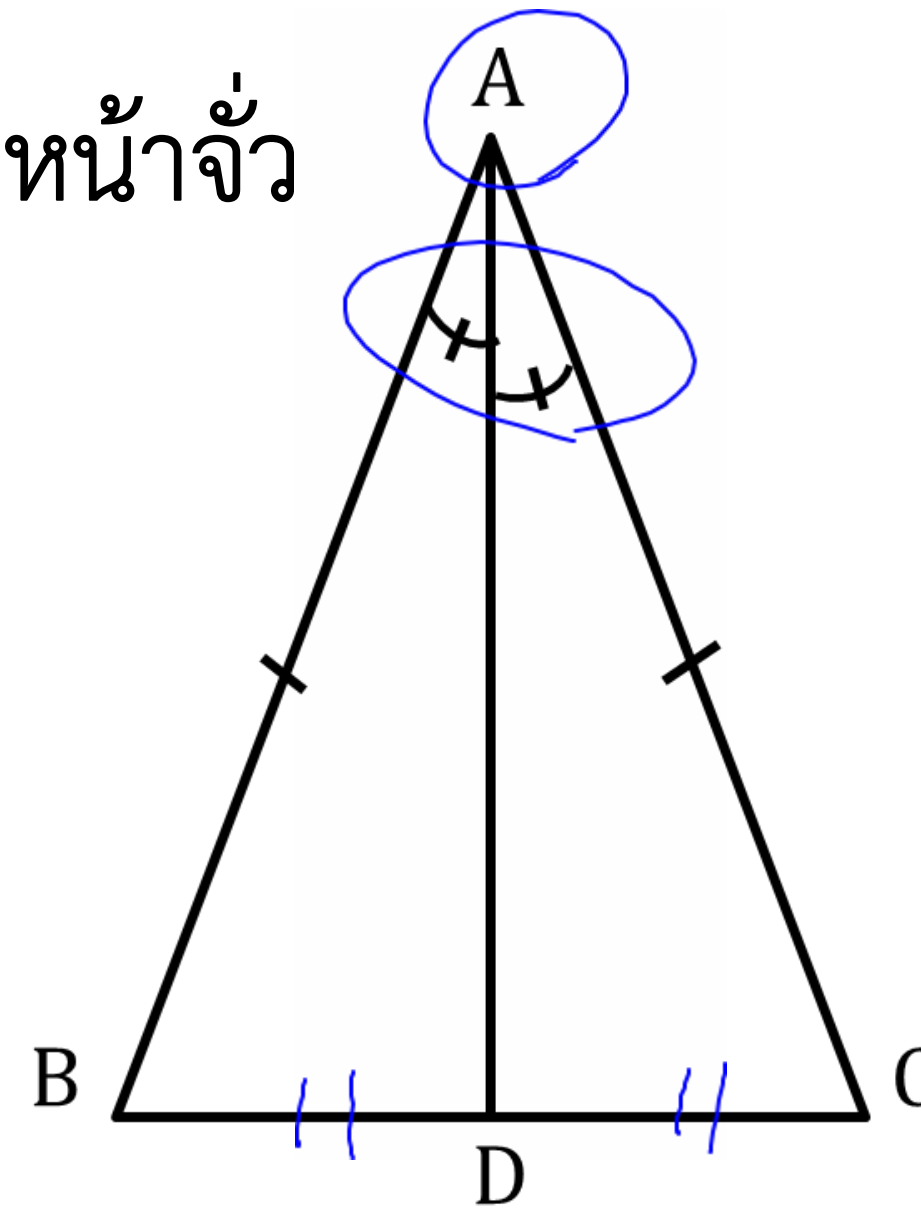
5. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
จะตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว





สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

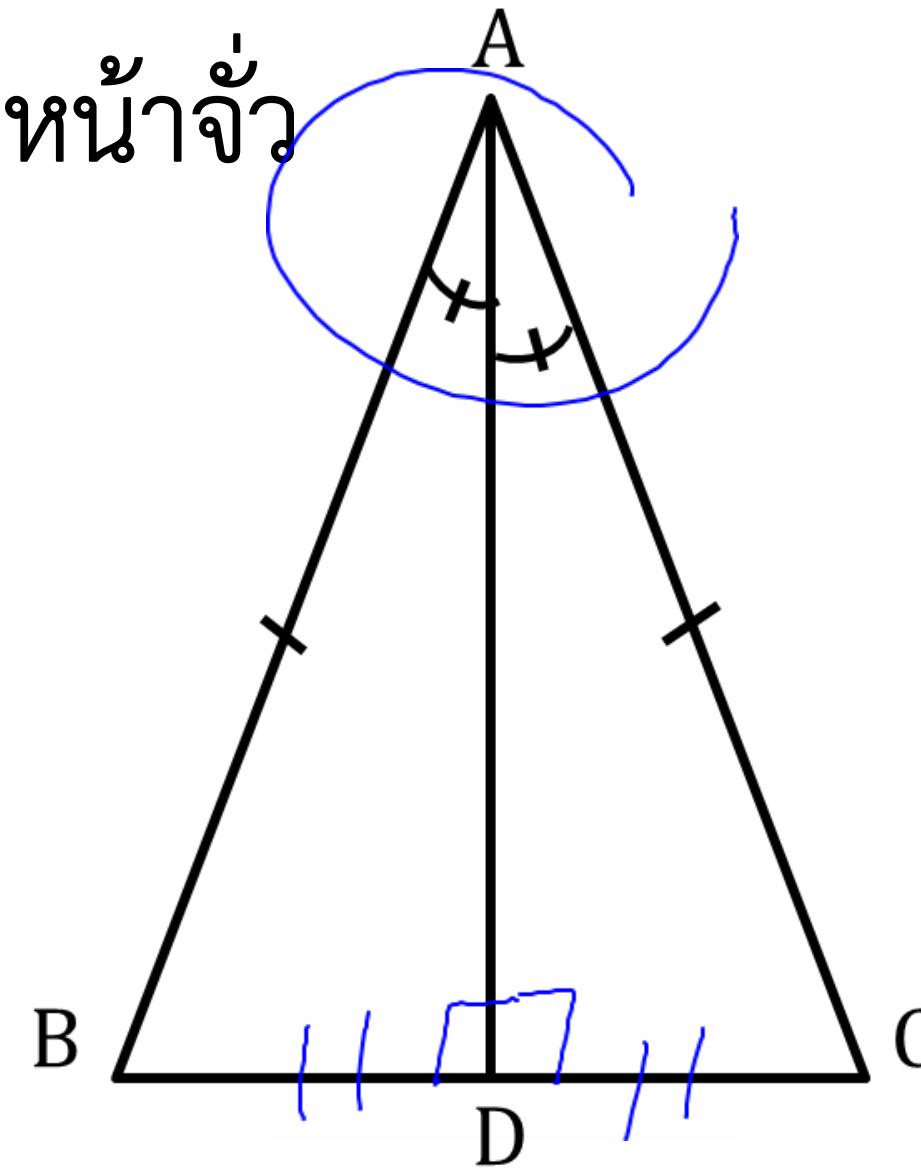
6. เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
มาแบ่งครึ่งฐานจะแบ่งครึ่งมุมยอด
ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว





สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

7. เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
มาแบ่งครึ่งฐาน จะตั้งฉากกับฐาน
ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

“ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน”



พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

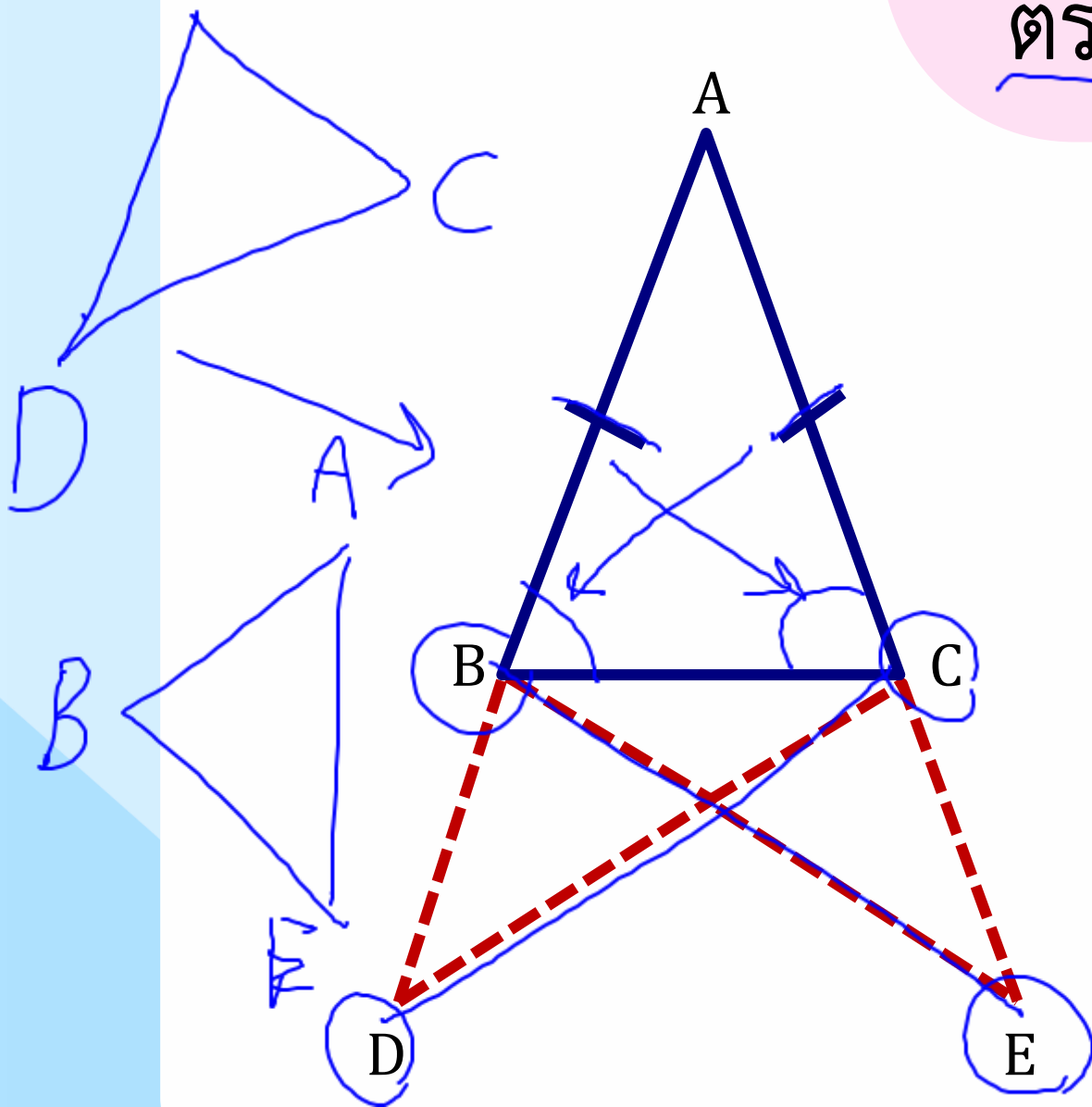
ทฤษฎีบท

“ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน”

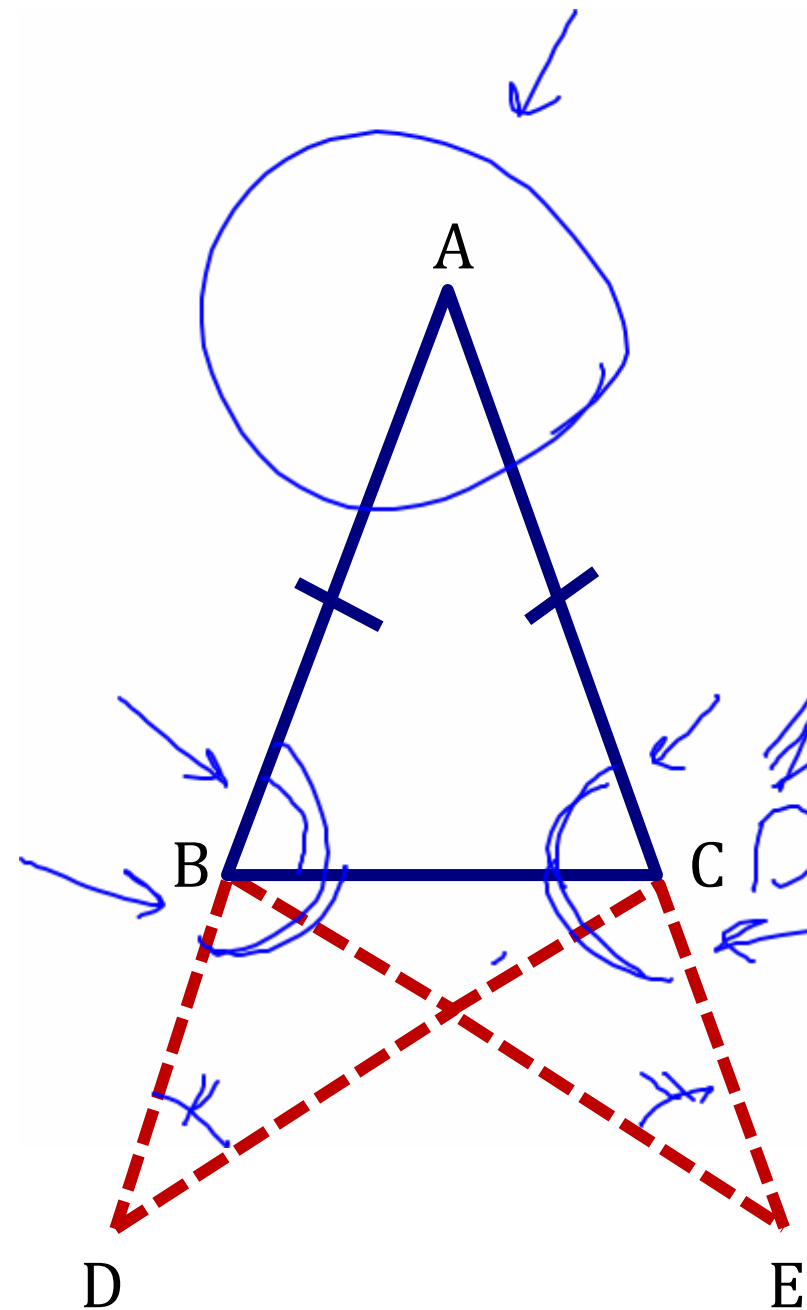
กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $AB = AC$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle C = \angle B$

พิสูจน์ ต่อบน $\overline{AB}$ ออกไปทางจุด B จนถึงจุด D และต่อบน $\overline{AC}$ ออกไปทางจุด C จนถึงจุด E โดยให้ $AD = AE$ ลาก $\overline{BD}$ และ $\overline{CE}$



พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $AB = AC$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle CEB = \angle BCE$

พิจารณา $\triangle ABE$ และ $\triangle ACD$

$AB = AC$ (กำหนดให้)

$\angle BAE = \angle CAD$ (เป็นมุมเดียวกัน)

$AE = AD$ (จากการสร้าง)

ดังนั้น $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ (ด้าน-มุม-ด้าน)

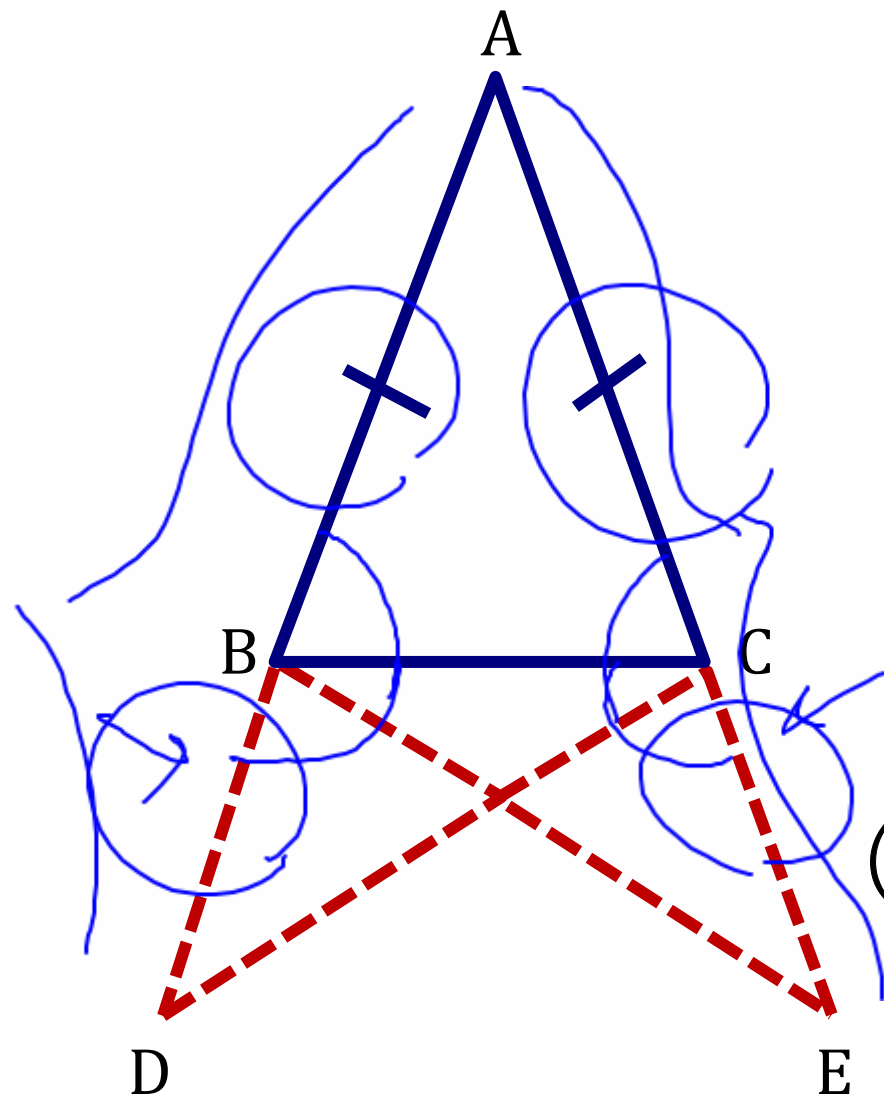
จะได้ $BE = CD$

(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

และ $\angle AEB = \angle ADC$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



พิจารณา $\triangle BCE$ และ $\triangle CBD$

เนื่องจาก $AE - AC = AD - AB$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ $CE = BD$ (สมบัติของการเท่ากัน)

เนื่องจาก $BE = CD$ และ $\angle E = \angle D$ (จากการพิสูจน์ข้างต้น)

ดังนั้น $\triangle BCE \cong \triangle CBD$ (ด้าน-มุม-ด้าน)

และ $\angle BCE = \angle CBD$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $\angle ACE = \angle ABD$ (ต่างก็เป็นมุมตรง)

จะได้ $\angle ACE - \angle BCE = \angle ABD - \angle CBD$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $\angle ACB = \angle ABC$ (สมบัติของการเท่ากัน)

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ทฤษฎีบท “ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน”

นอกจากนี้ บทกลับของทฤษฎีบทนี้ก็เป็นจริงด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

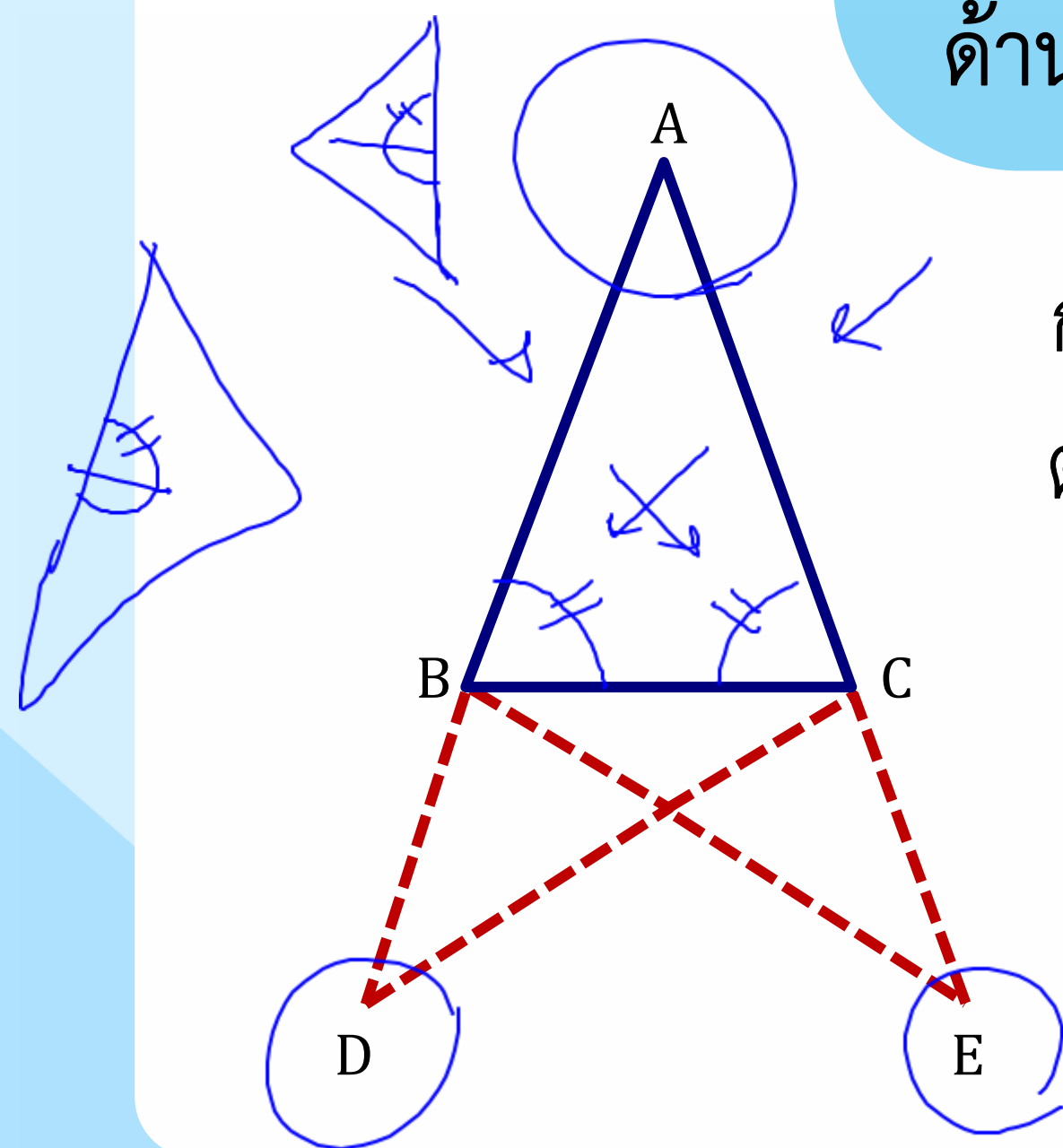
ทฤษฎีบท “รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่ขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน”



พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ทฤษฎีบท

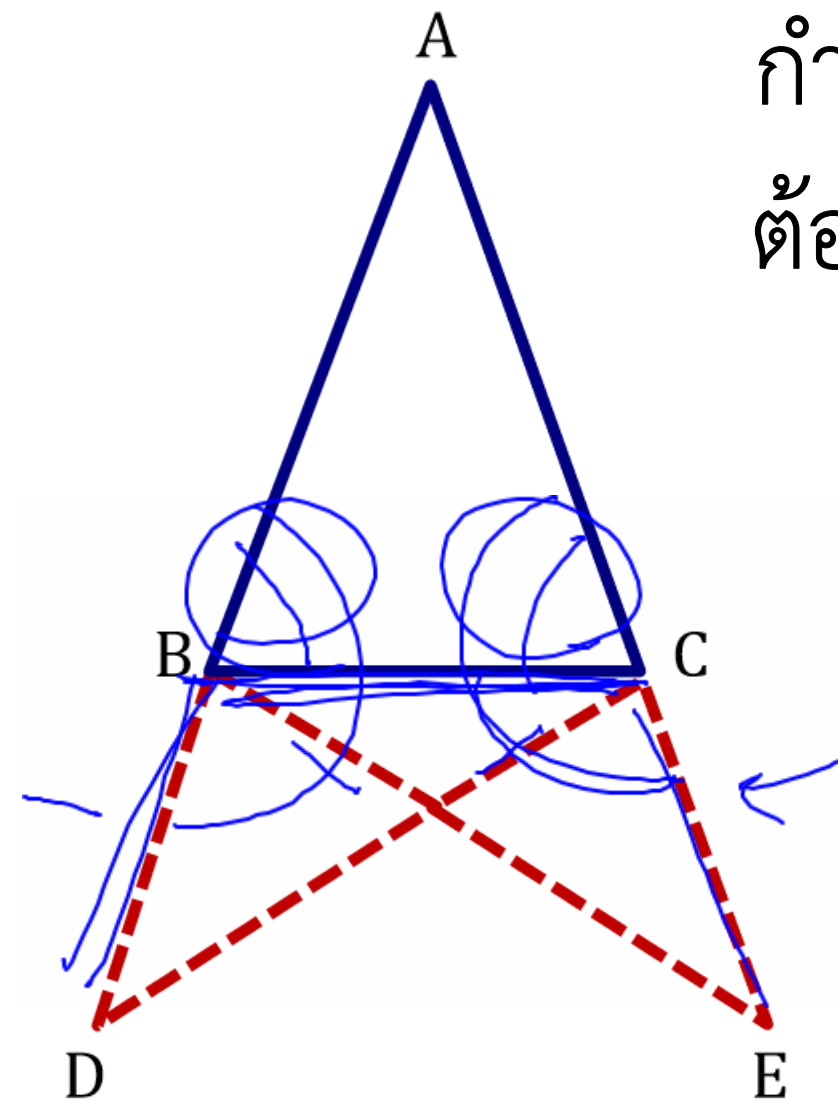
“รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุมแล้ว
ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่ขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน”



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\hat{A}CB = \hat{A}BC$
ต้องการพิสูจน์ว่า $AB = AC$

พิสูจน์ ต่อ $\overline{AB}$ ออกไปทางจุด B จนถึงจุด D และต่อ $\overline{AC}$
ออกไปทางจุด C จนถึงจุด E โดยให้ $AD = AE$ ลาก
 $\overline{BD}$ และ $\overline{CE}$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\angle C = \angle B$
ต้องการพิสูจน์ว่า $AB = AC$

เนื่องจาก

$$\angle B = \angle C$$

(กำหนดให้)

$$\angle ABD = \angle ACE$$

(ต่างก็เป็นมุมตรง)

จะได้ $\angle ABD - \angle B = \angle ACE - \angle C$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น

$$\angle BCD = \angle ECB$$

(สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้

$$BC = CB$$

(เป็นด้านร่วม)

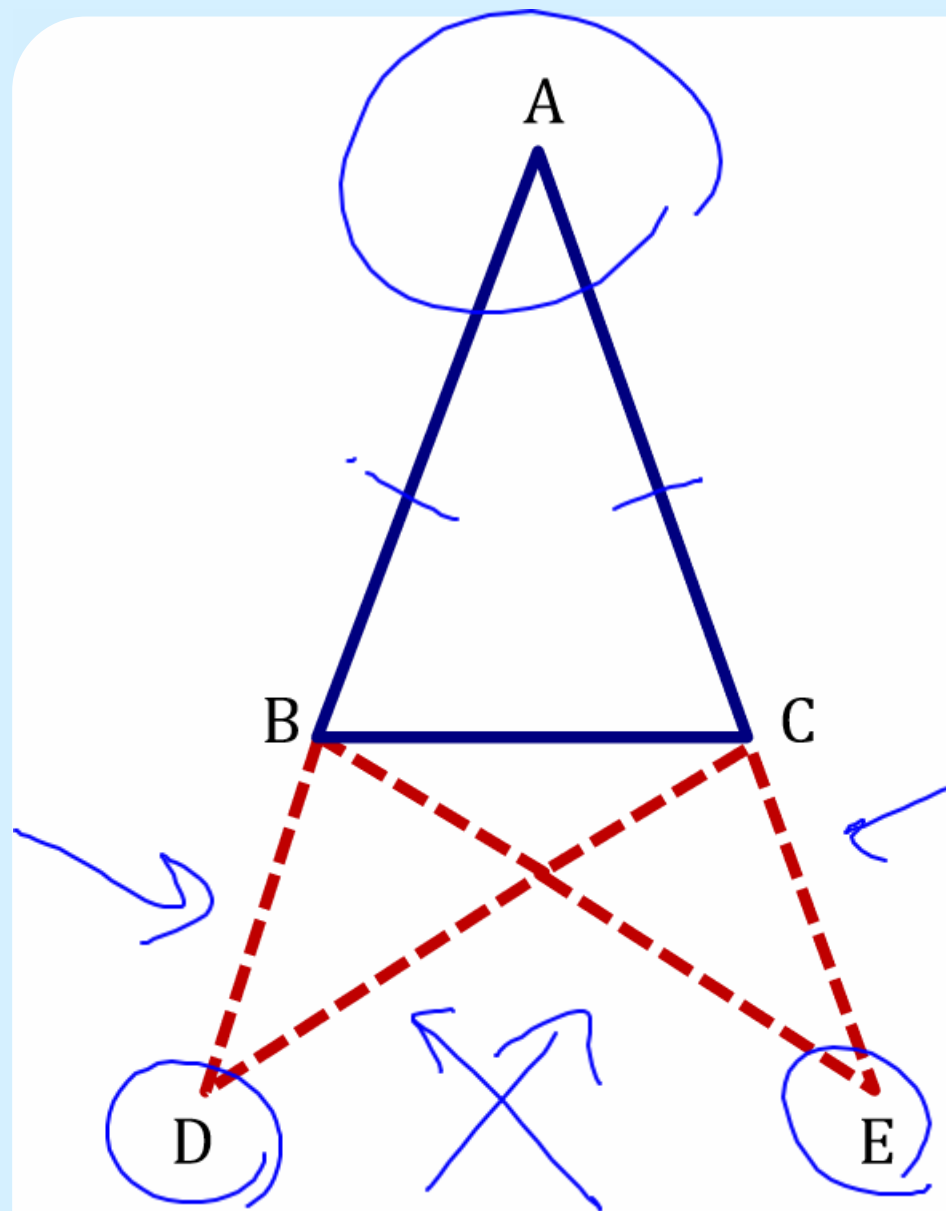
และ

$$BD = CE$$

(จากการสร้าง)

ดังนั้น $\triangle BCD \cong \triangle ECB$ (ด้าน-มุม-ด้าน)

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



$$\text{และ } CD = BE$$

(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

$$\widehat{CDB} = \widehat{BEC}$$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

$$\widehat{DAC} = \widehat{EAB}$$

(เป็นมุมร่วม)

$$\text{ดังนั้น } \triangle DAC \cong \triangle EAB$$

(มุม-มุม-ด้าน)

$$\text{นั่นคือ } AC = AB$$

(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ทฤษฎีบท “ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน”

นอกจากนี้ บทกลับของทฤษฎีบทนี้ก็เป็นจริงด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท “รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่ขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน”

ทฤษฎีบท “ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน”



แบบฝึกหัดที่ 7

ทฤษฎีสำคัญเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (1)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

แบบฝึกหัดที่ 7 : ทฤษฎีสำคัญเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (1)

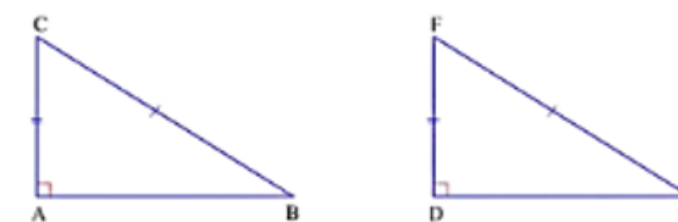
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (2)

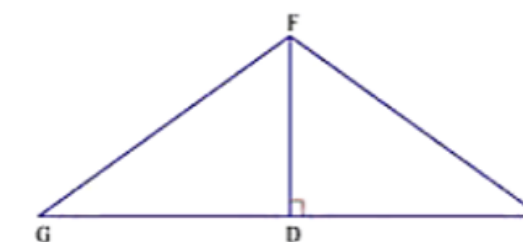
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน (ฉ.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า
พิสูจน์



ต่อ $\overline{ED}$ ออกไปทางจุด D จนถึงจุด G ทำให้ $DG = AB$ ลาก $\overline{GF}$

เนื่องจาก

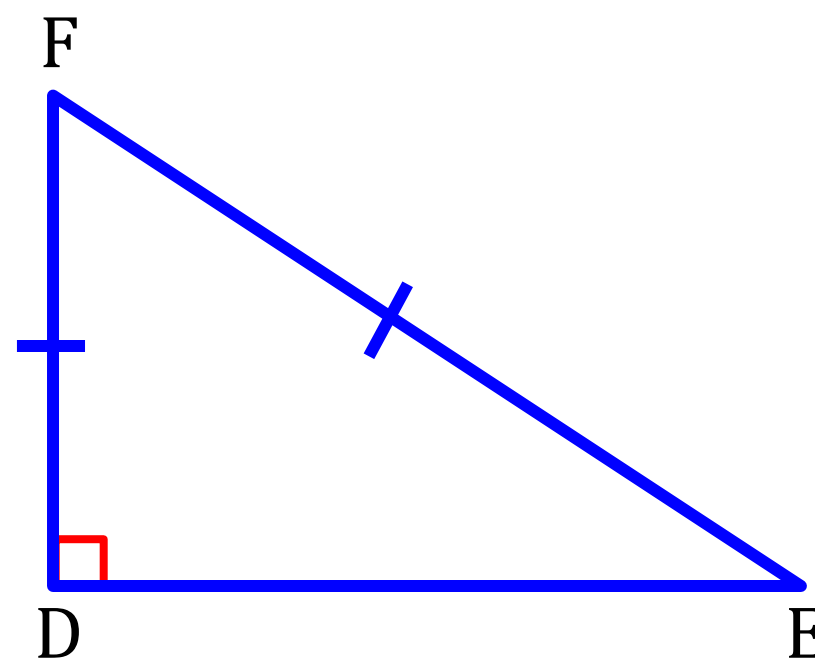
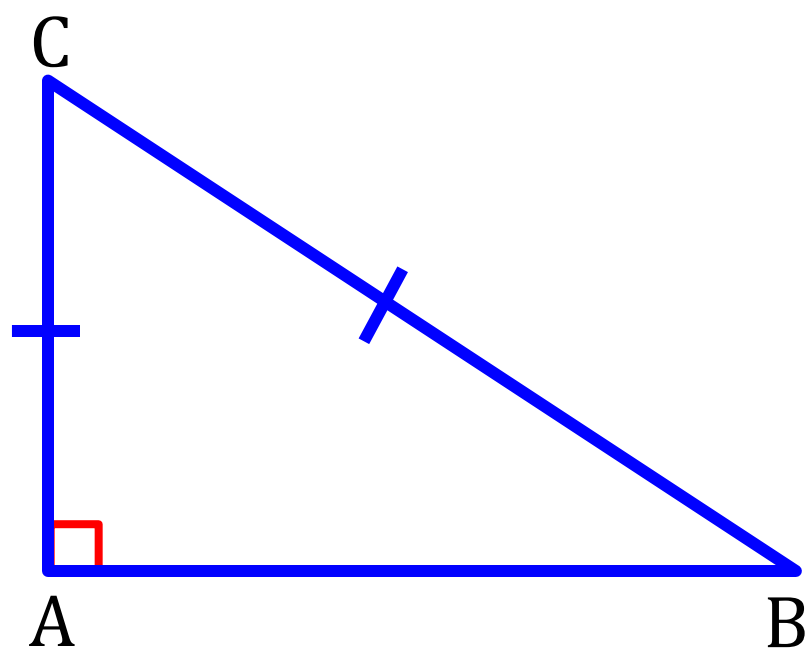
$$AC = DF$$

$$AB = DG$$



แบบฝึกหัดที่ 7

ทฤษฎีบท “ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (จ.ด.ด.)
กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกหนึ่งคู่ยาวเท่ากัน
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ”





เฉลยแบบฝึกหัดที่ 7

ทฤษฎีสำคัญเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (1)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

แบบฝึกหัดที่ 7 : ทฤษฎีสำคัญเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (1)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (2)

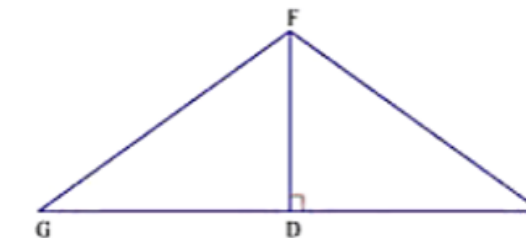
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน (ฉ.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า
พิสูจน์



ต่อ $\overline{ED}$ ออกไปทางจุด D จนถึงจุด G ทำให้ $DG = AB$ ลาก $\overline{GF}$

เนื่องจาก

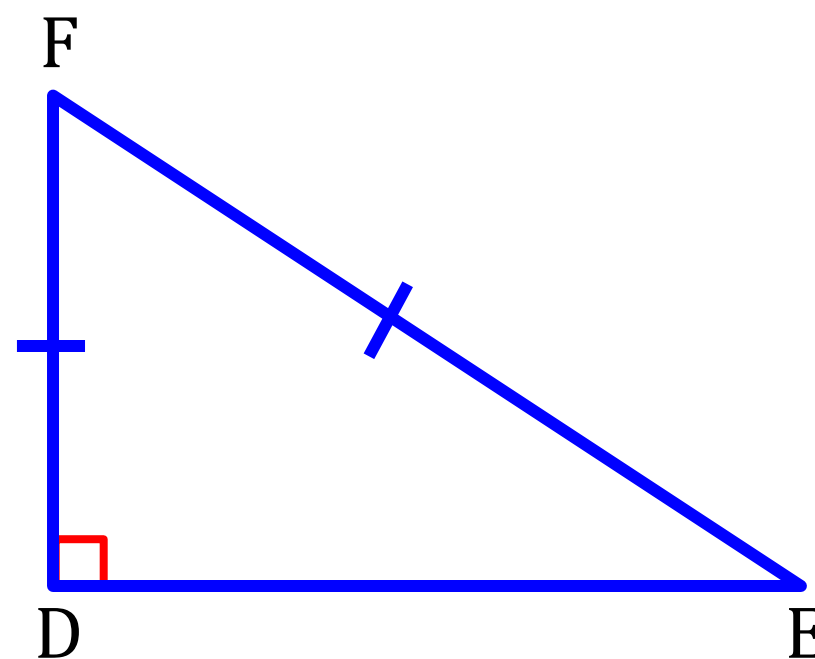
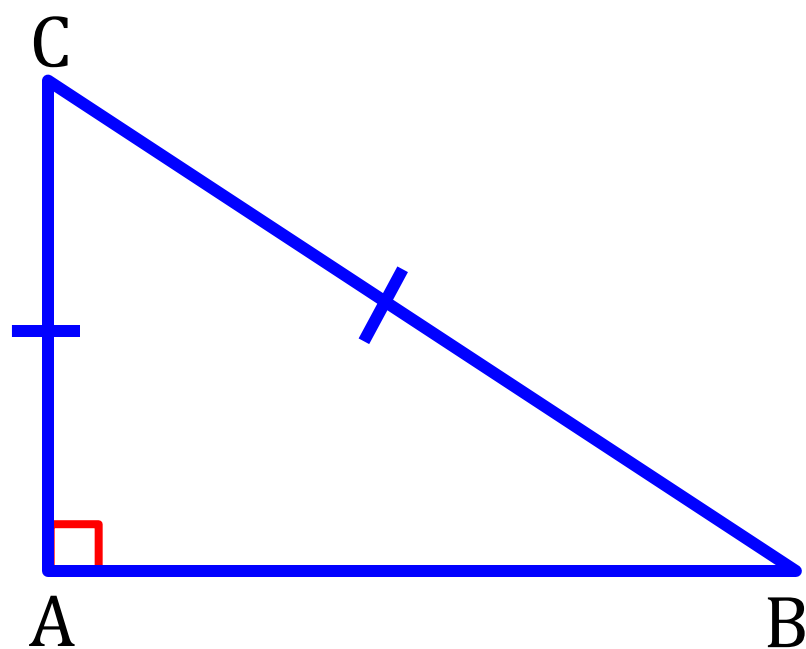
$$AC = DF$$

$$AB = DG$$



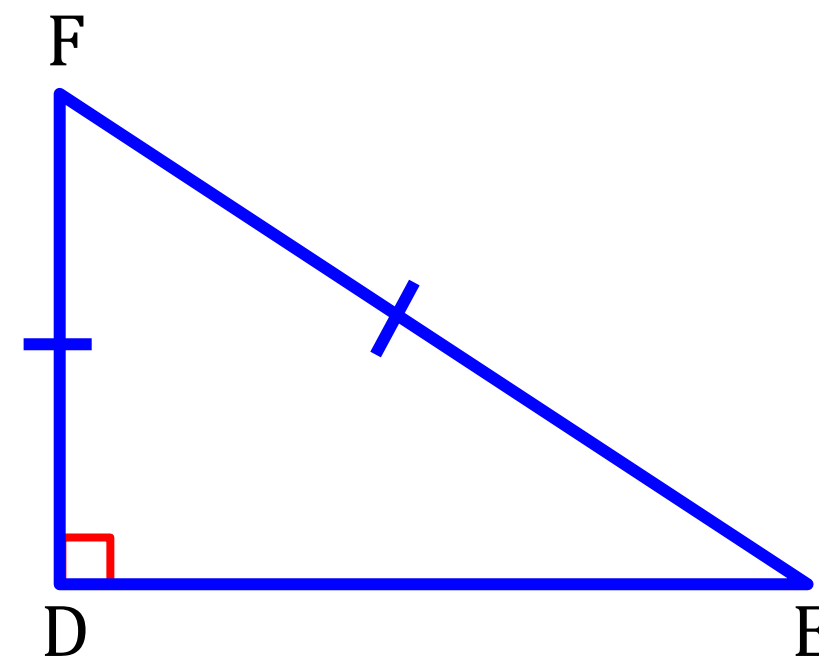
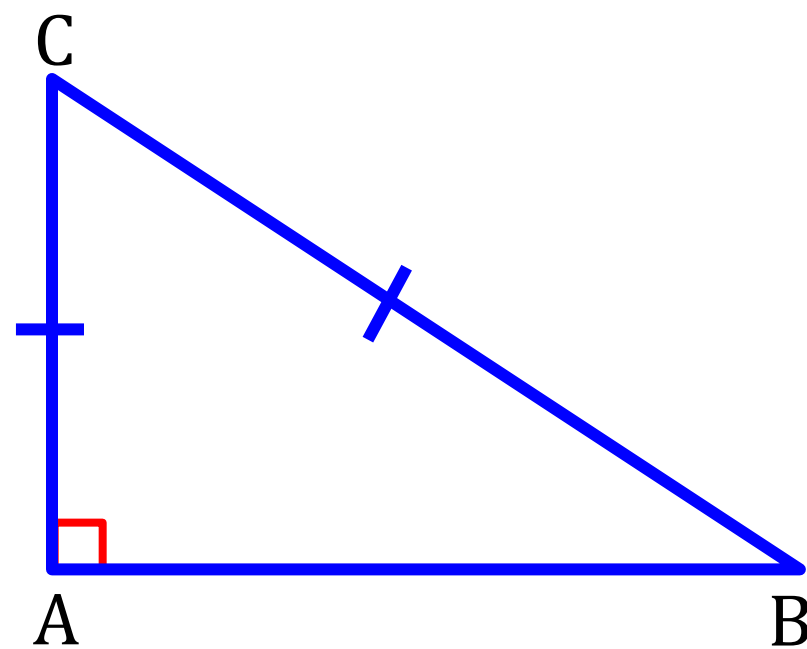
แบบฝึกหัดที่ 7

ทฤษฎีบท “ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (จ.ด.ด.)
กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกหนึ่งคู่ยาวเท่ากัน
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ”





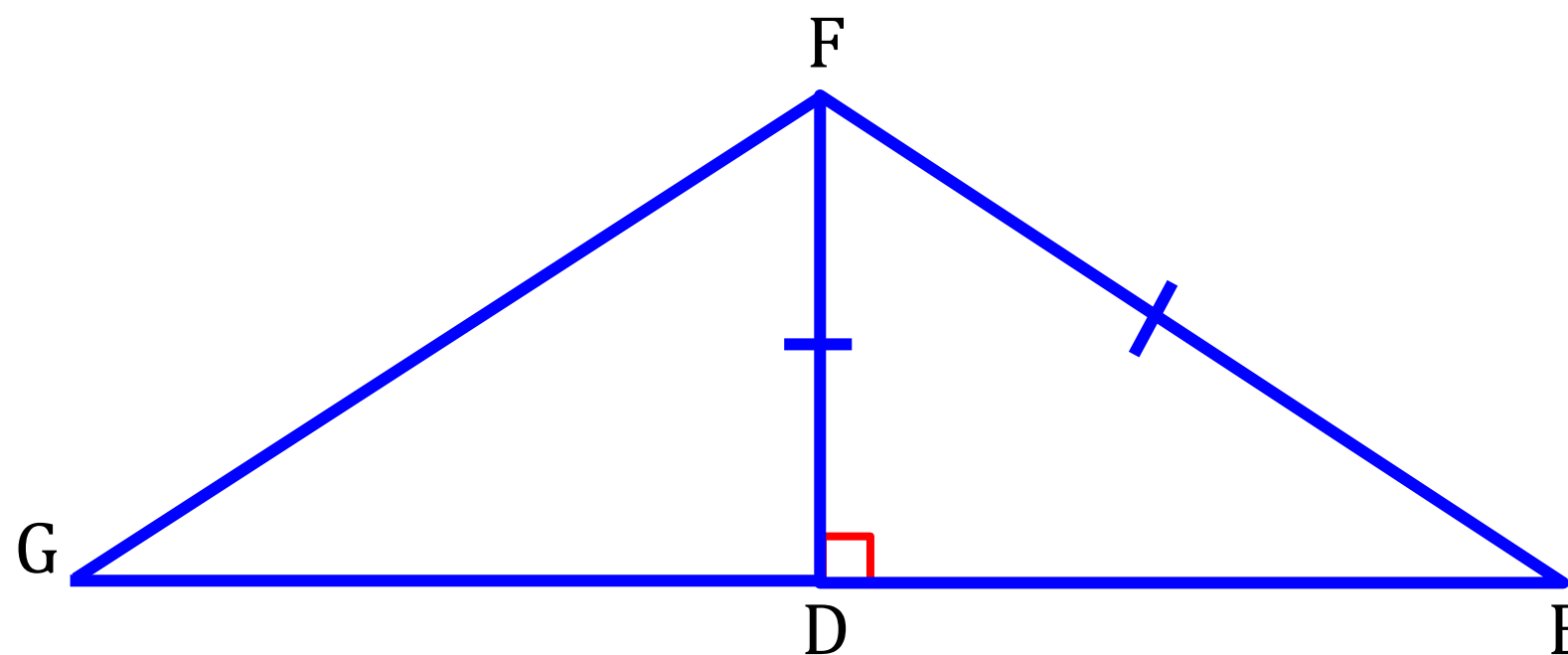
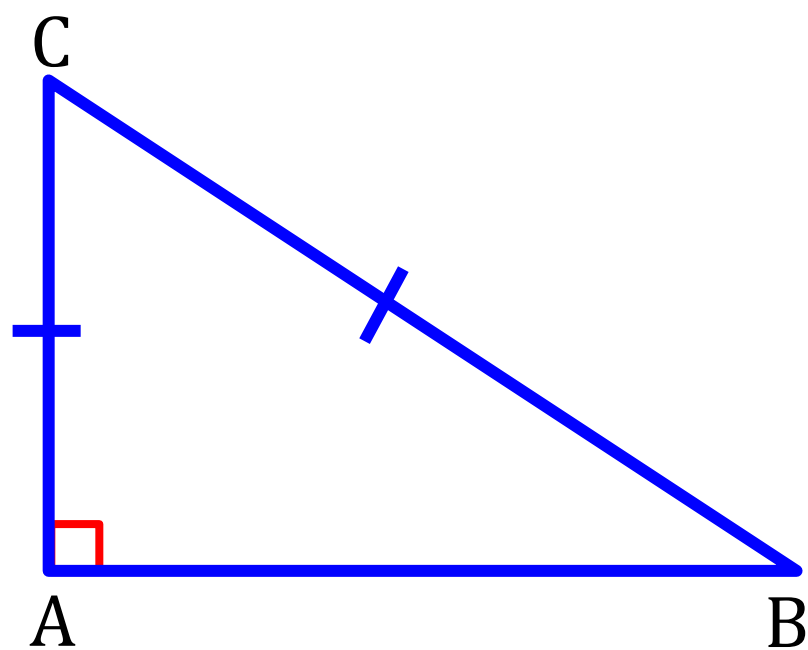
แบบฝึกหัดที่ 7



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 90^\circ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



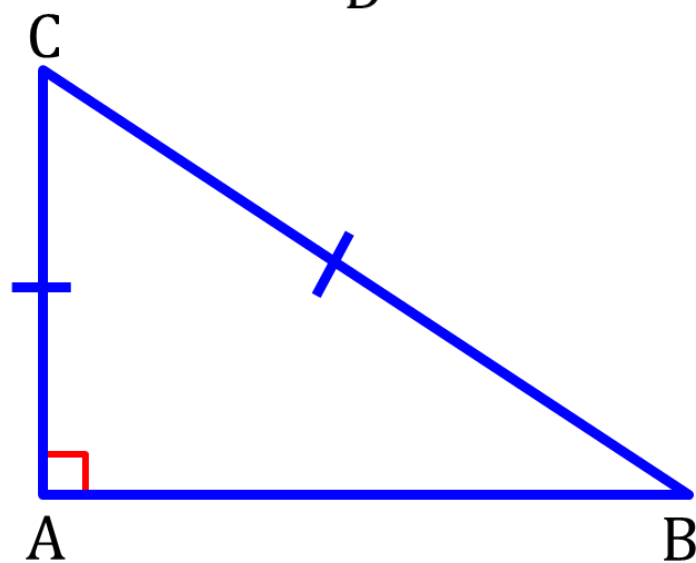
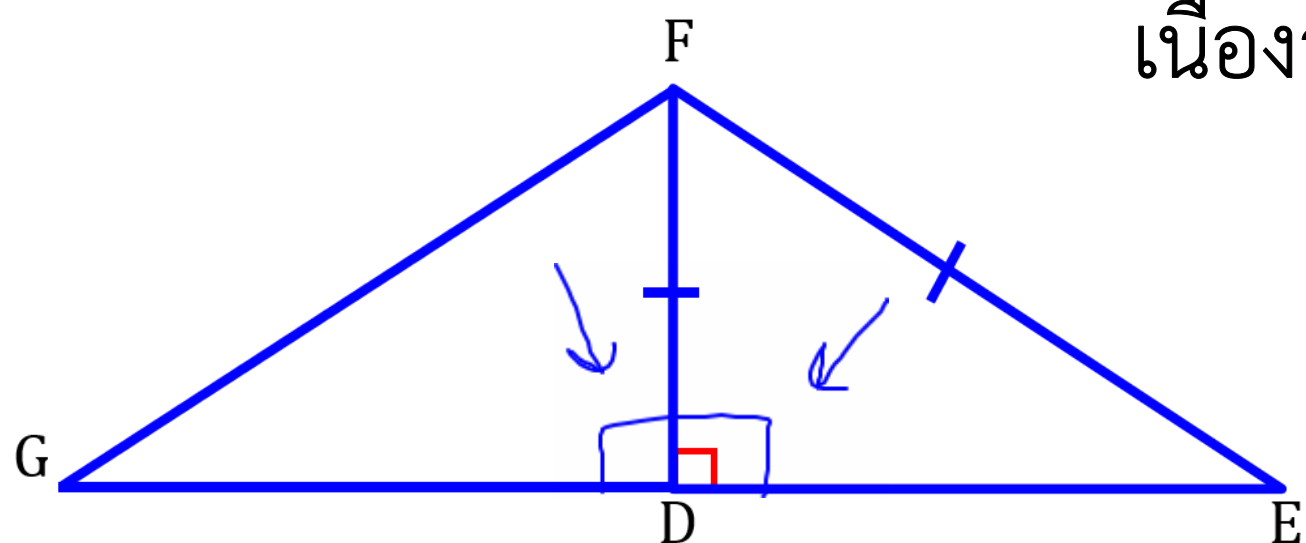
แบบฝึกหัดที่ 7



ต่อ $\overline{ED}$ ออกไปทางจุด D จนถึงจุด G ทำให้ $DG = AB$ ลาก $\overline{GF}$



แบบฝึกหัดที่ 7



เนื่องจาก

$$AC = DF$$

(กำหนดให้)

$$AB = DG$$

(จากการสร้าง)

$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$

(กำหนดให้)

$$\widehat{GDF} = 90^\circ$$

($\widehat{EDF} = 90^\circ$ และ $\widehat{EDF}$ เป็นมุมตรง)

จะได้ $\widehat{BAC} = \widehat{GDF}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

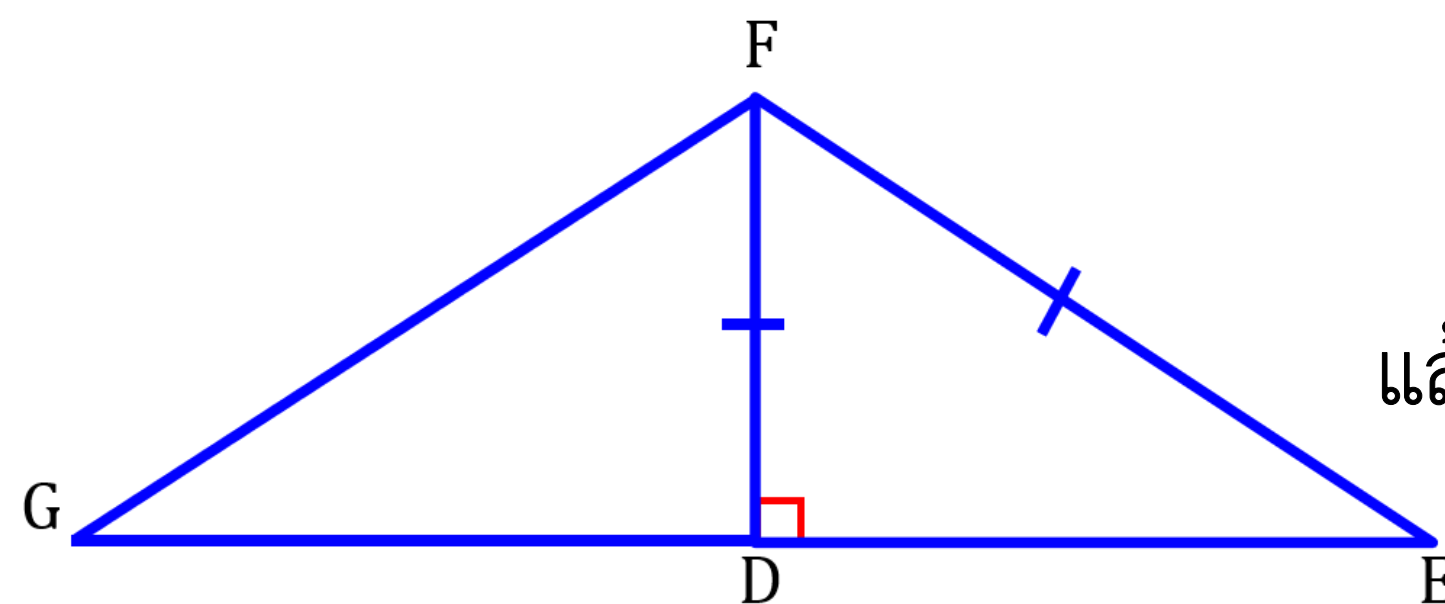
ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DGF$ (ด้าน-มุม-ด้าน)

และ $BC = GF$

(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)



แบบฝึกหัดที่ 7



จะได้

เนื่องจาก $BC = EF$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $GF = EF$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ $\widehat{FED} = \widehat{FGD}$

(ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน
แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน)

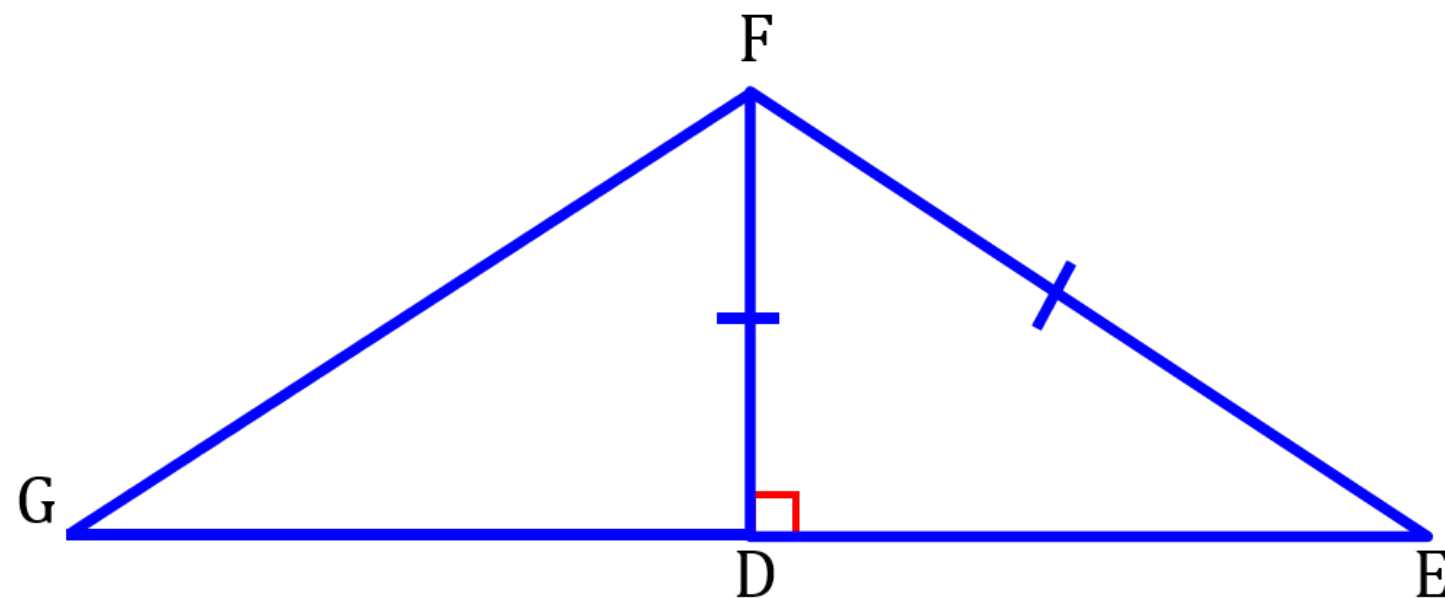
เนื่องจาก $\widehat{FDE} = 90^\circ$ (กำหนดให้)

$\widehat{FDG} = \widehat{FDE}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$DF = DF$ (เป็นด้านร่วม)



แบบฝึกหัดที่ 7



ดังนั้น $\triangle DGF \cong \triangle DEF$ (มุม-มุม-ด้าน)

เนื่องจาก $\triangle ABC \cong \triangle DGF$ (จากการพิสูจน์ข้างต้น)

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)



สรุปบทเรียน

ทฤษฎีบท “ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน”

นอกจากนี้ บทกลับของทฤษฎีบทนี้ก็เป็นจริงด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท “รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่ขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน”

ทฤษฎีบท “ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน”



สรุปบทเรียน

ทฤษฎีบท “ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ
ฉาก-ด้าน-ด้าน (จ.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน
และมีด้านอื่นอีกหนึ่งคู่ยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น
เท่ากันทุกประการ”



บทเรียนครั้งต่อไป

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากัน
ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
(3)





สิ่งที่ต้องเตรียม

แบบฝึกหัดที่ 8

: ทฤษฎีสำคัญเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม
หน้าจั่ว (2)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

