

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค22102 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เส้นขนาน

เรื่อง เส้นขนานกับมุมภายในและมุมภายนอก

ครูผู้สอน ครูอชราวุธ ไชยมงคล



หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง เส้นขนาน

เส้นขนานกับมุมภายในและมุมภายนอก



จุดประสงค์การเรียนรู้

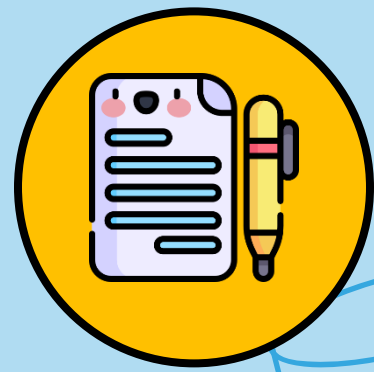
นักเรียนสามารถวิเคราะห์ ตรวจสอบความขนานกัน
ของเส้นตรงสองเส้นโดยใช้ระยะห่างระหว่างเส้นตรง
และทฤษฎีมุมเกี่ยวกับมุมภายนอกและมุมภายใน

๖ ๑ ๒ ๓ ๔ ๕ ๖ ๗

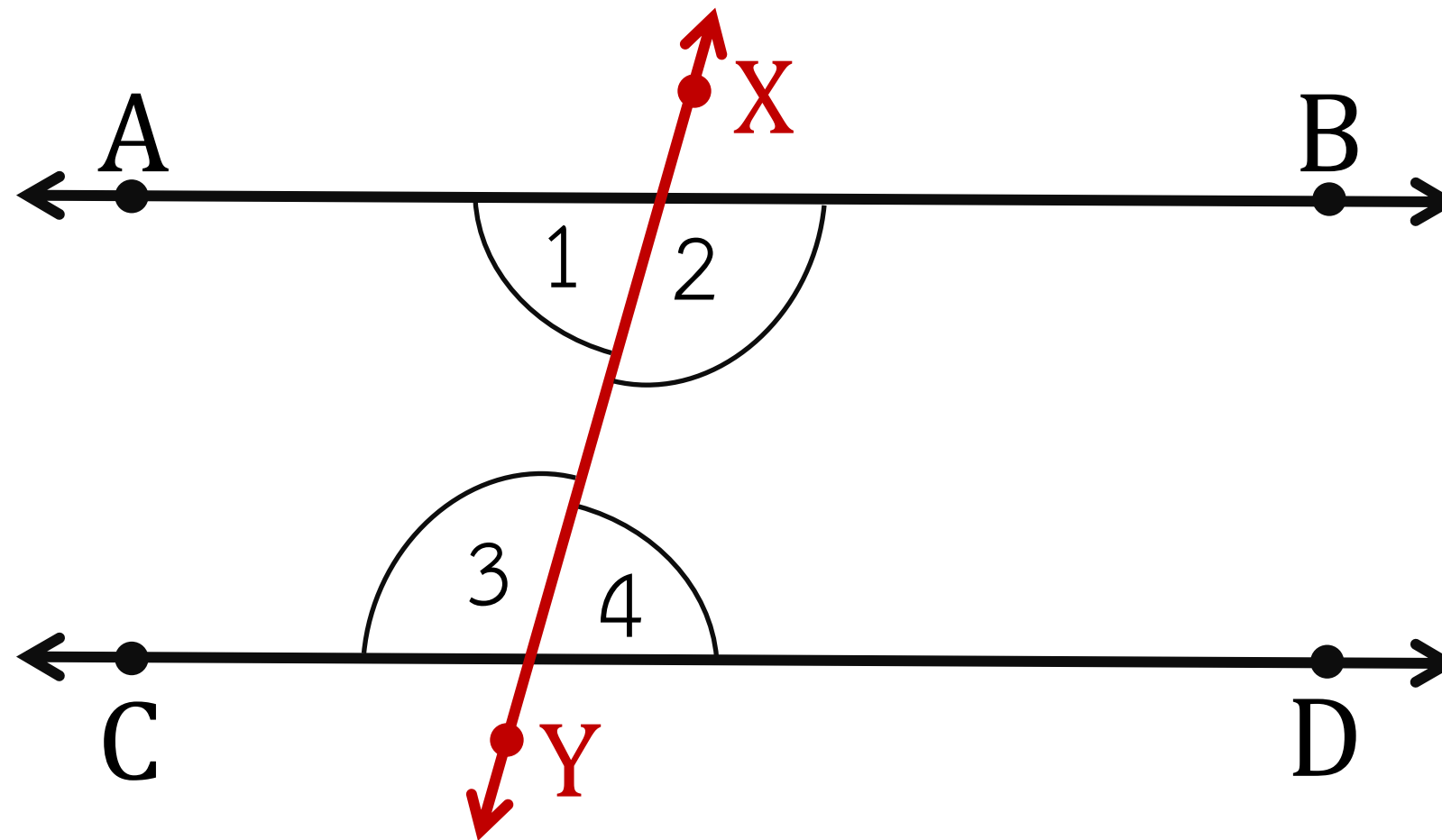
Angle A = Angle B

L1 || L2



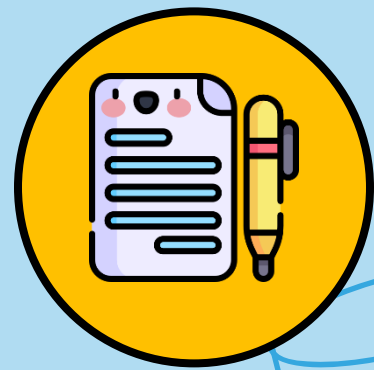


ทบทวน

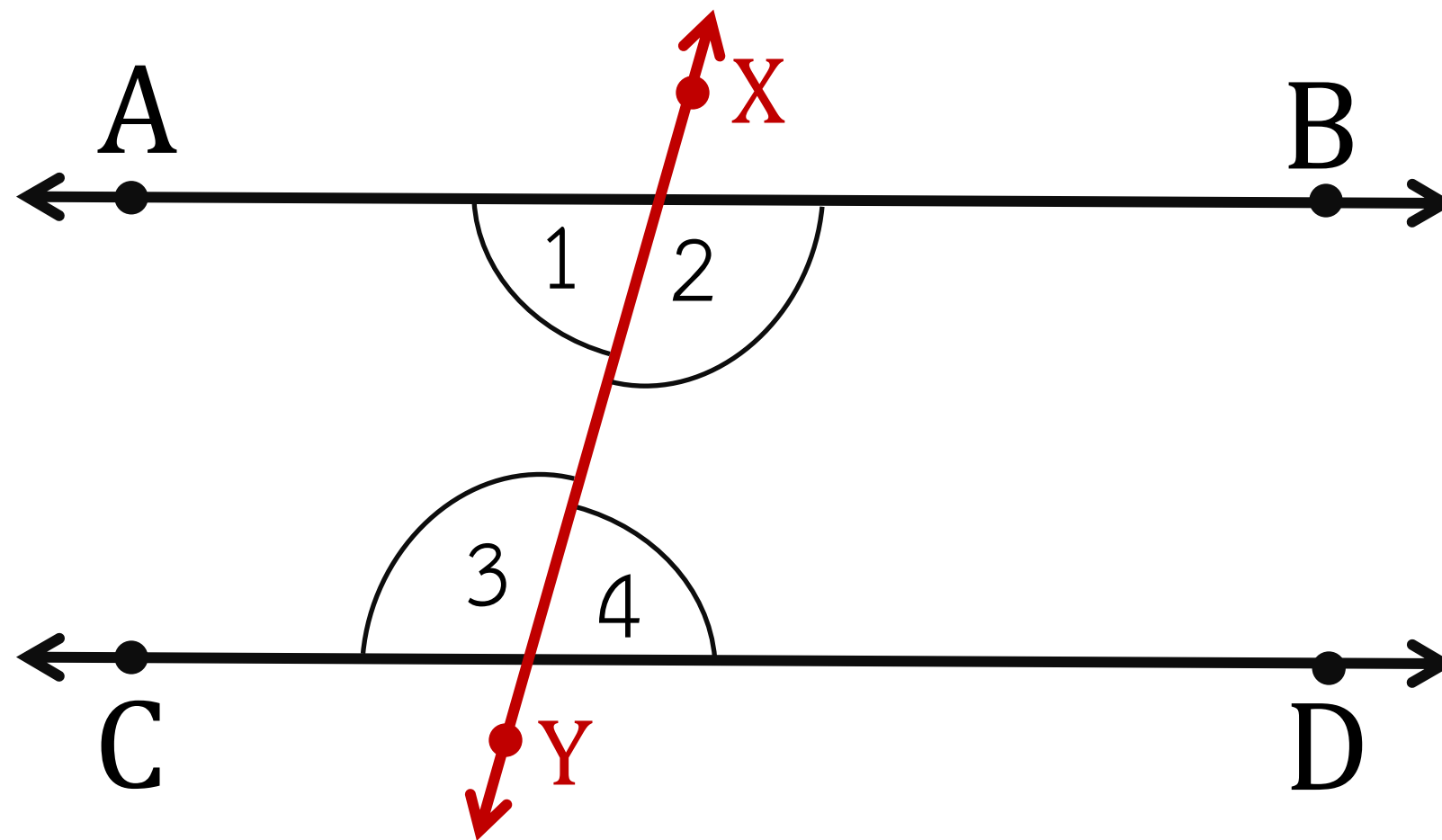


จากรูป $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ แล้วมุมคูใดบ้างที่มีขนาดเท่ากัน ทราบได้อย่างไร

$\hat{1} = \hat{4}$ และ $\hat{2} = \hat{3}$ เพราะ เป็นมุมแย้งกัน

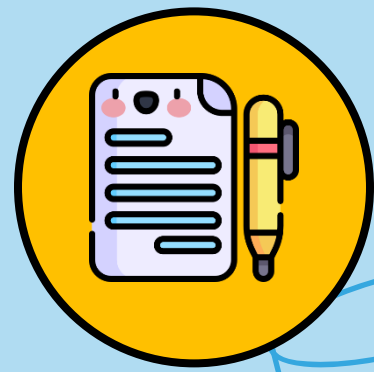


ทบทวน



มุมใดบ้างที่รวมกันได้ 180 องศา ทราบได้อย่างไร

$\hat{1}$ กับ $\hat{3}$ และ $\hat{2} = \hat{4}$ เพราะ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด



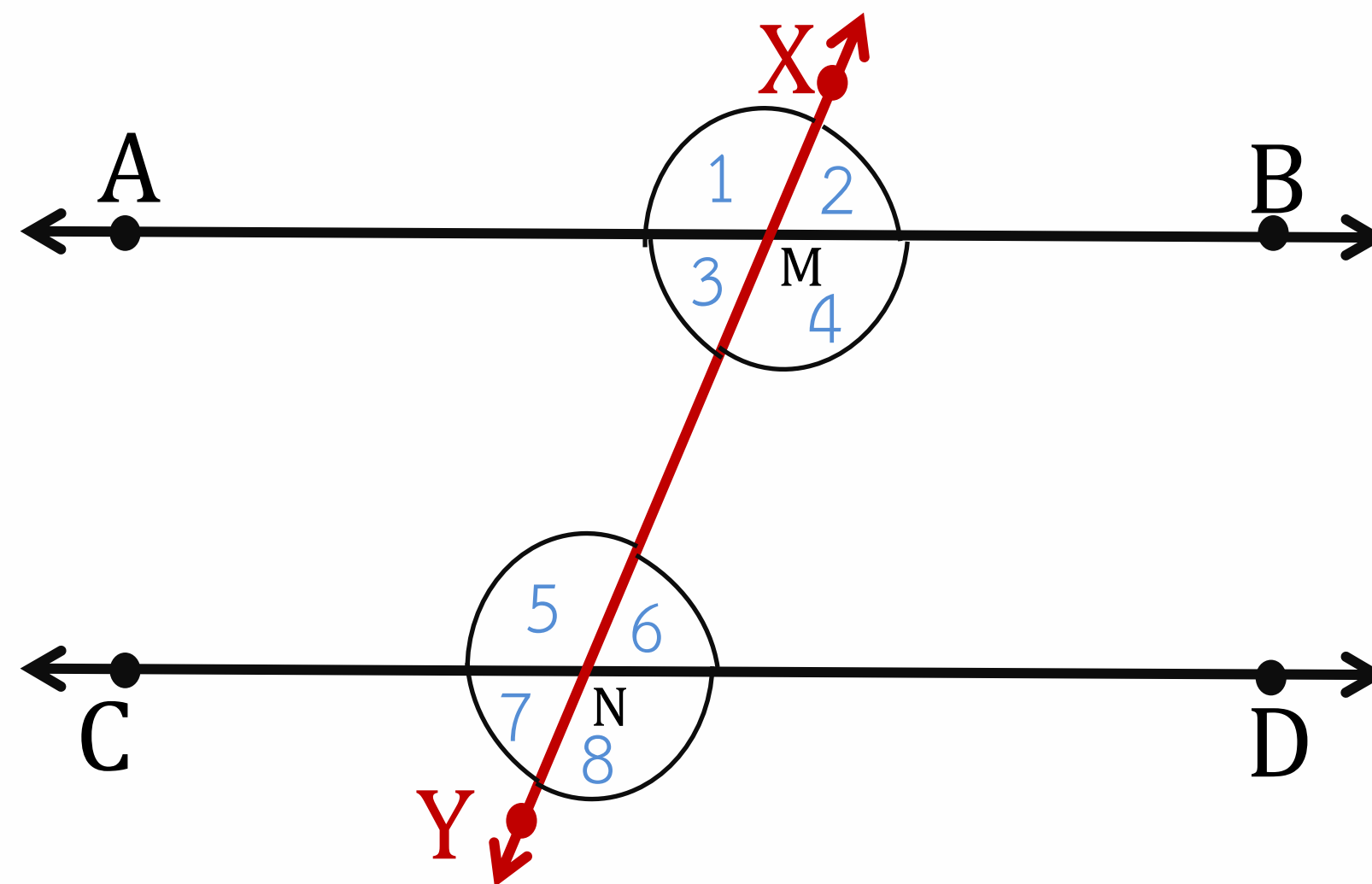
ทบทวน

ถ้าไม่ได้กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ เราจะตรวจสอบได้อย่างไรว่า
 $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกันหรือไม่

ตรวจสอบได้โดยใช้สมบัติของเส้นขนานที่กล่าวว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง
ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา
แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน หรือตรวจสอบโดยใช้ทฤษฎีที่กล่าวว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง
ตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน



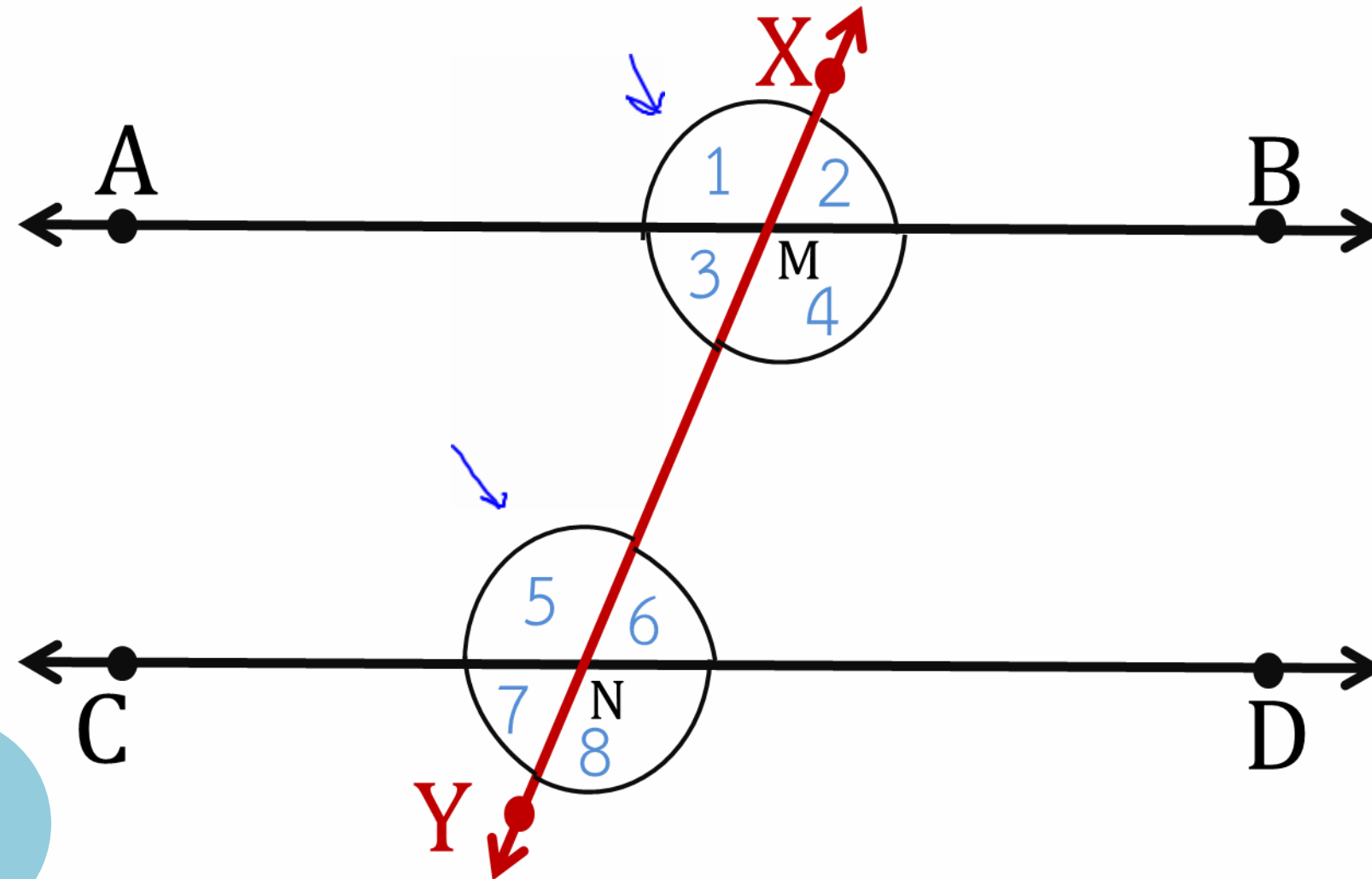
จากแผนภาพ

เรียก $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ และ $\hat{8}$ ว่ามุมภายนอก

เรียก $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ และ $\hat{6}$ ว่ามุมภายใน



เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน



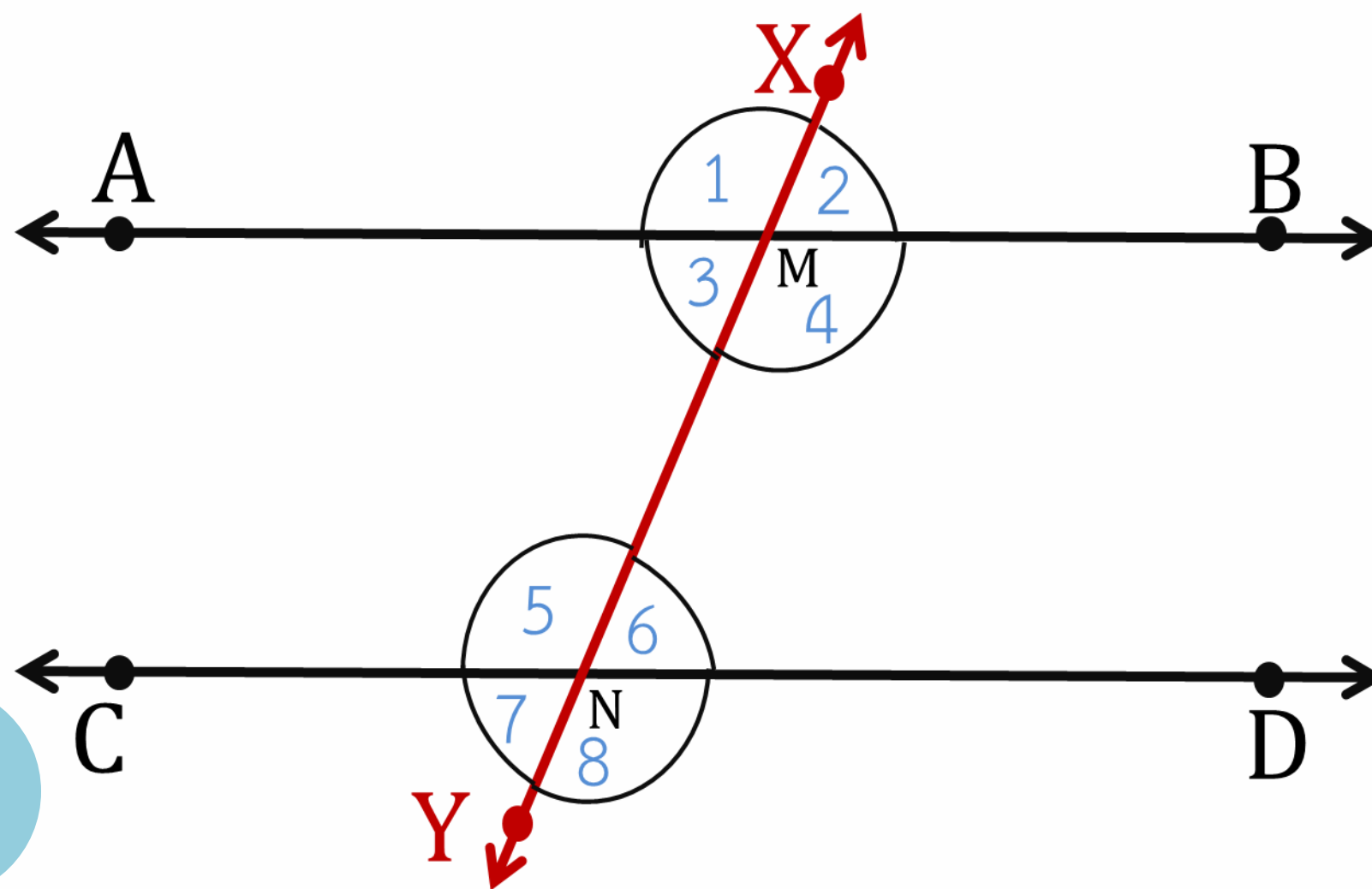
จากแผนภาพ

เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{5}$ ว่า มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

เรียก $\hat{7}$ และ $\hat{3}$ ว่า มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด



เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน



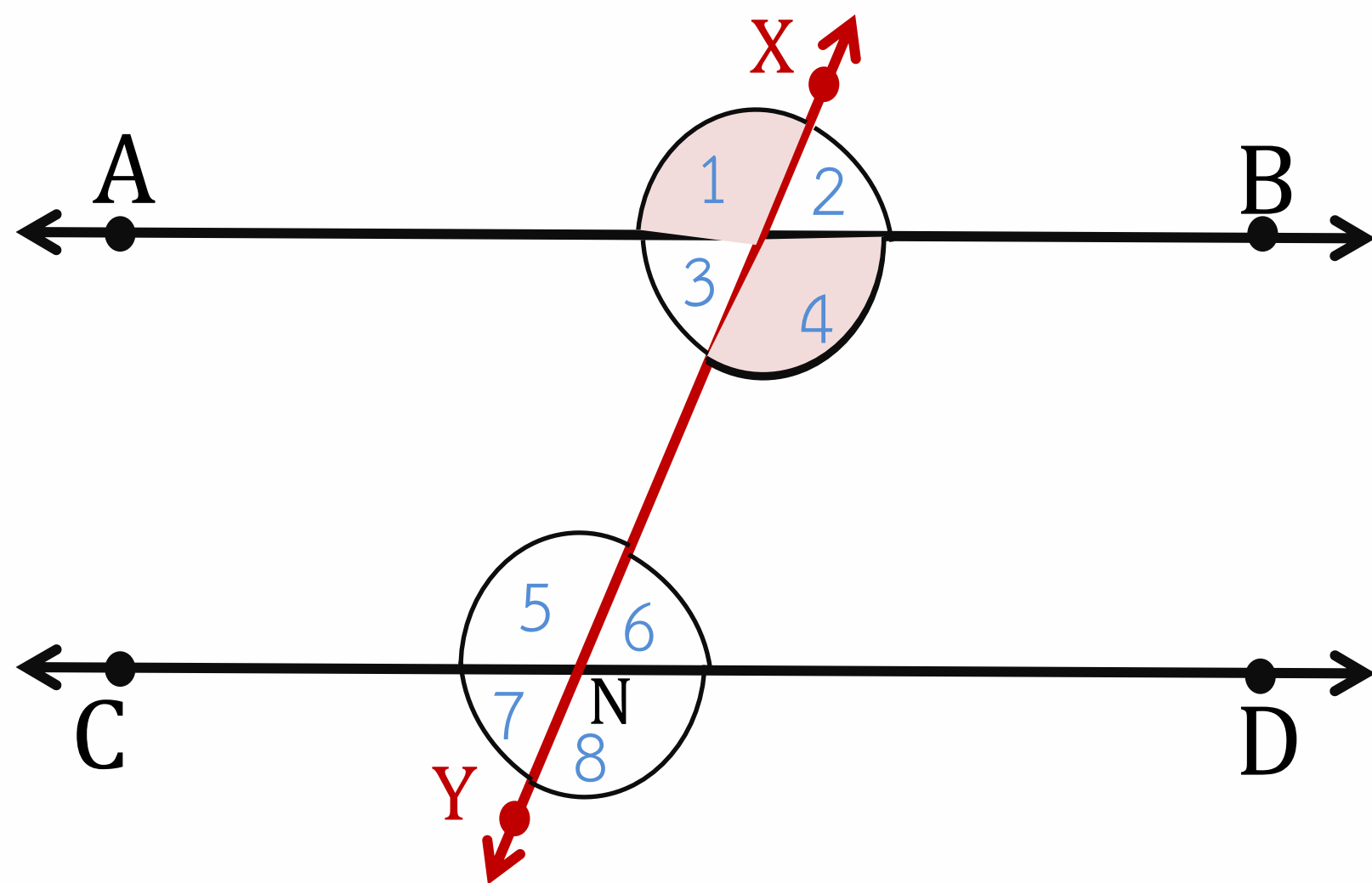
จากแผนภาพ

เรียก $\hat{2}$ และ $\hat{6}$ ว่า มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

เรียก $\hat{4}$ และ $\hat{8}$ ว่า มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด



เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน

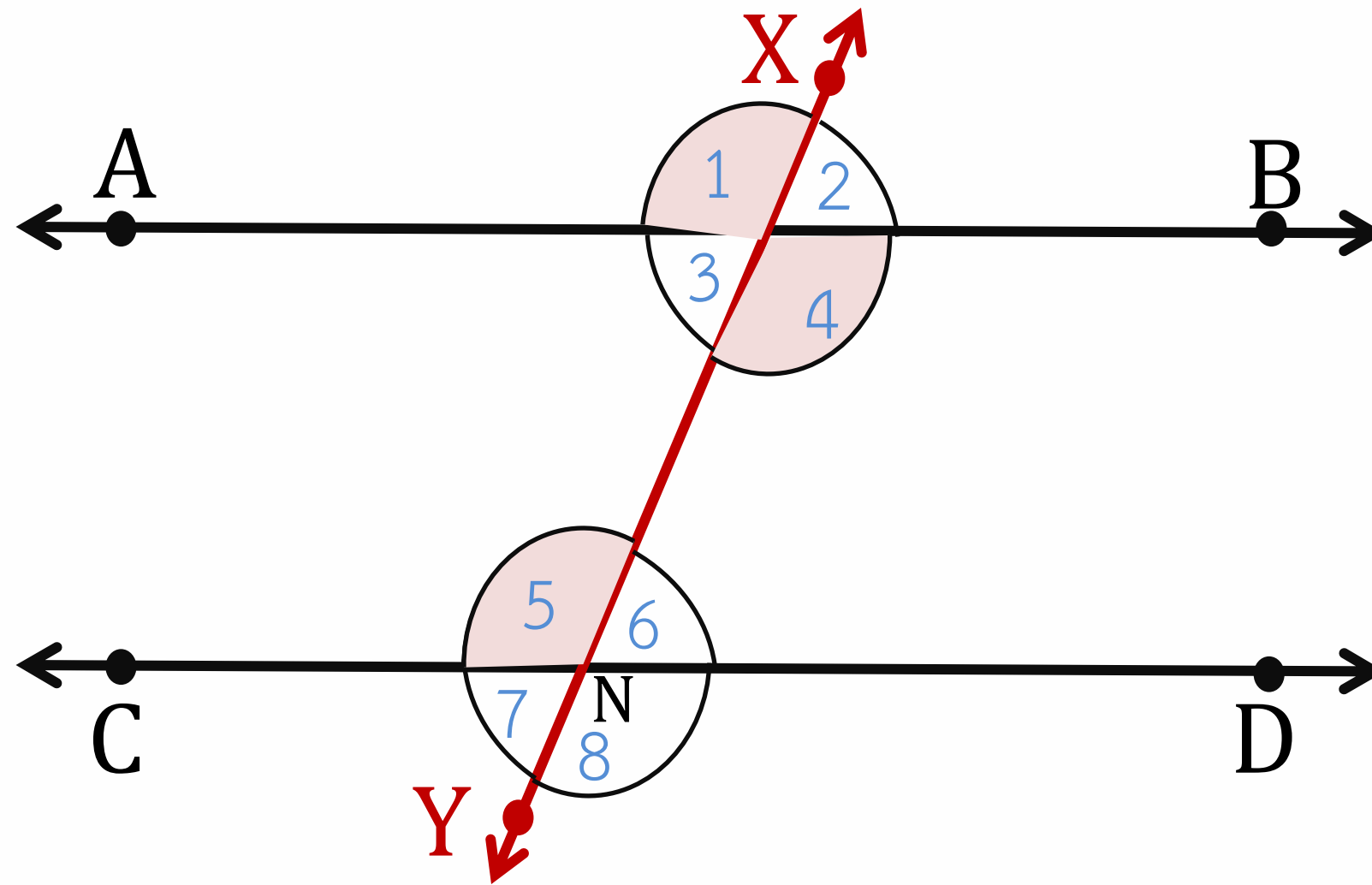


พิจารณา $\hat{2}$ ถึง $\hat{4}$ มุมใดมีขนาดเท่ากับ $\hat{1}$ เพราะเหตุใด

$\hat{4}$ เพราะ $\hat{4}$ เป็นมุมตรงข้ามกับ $\hat{1}$



เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน

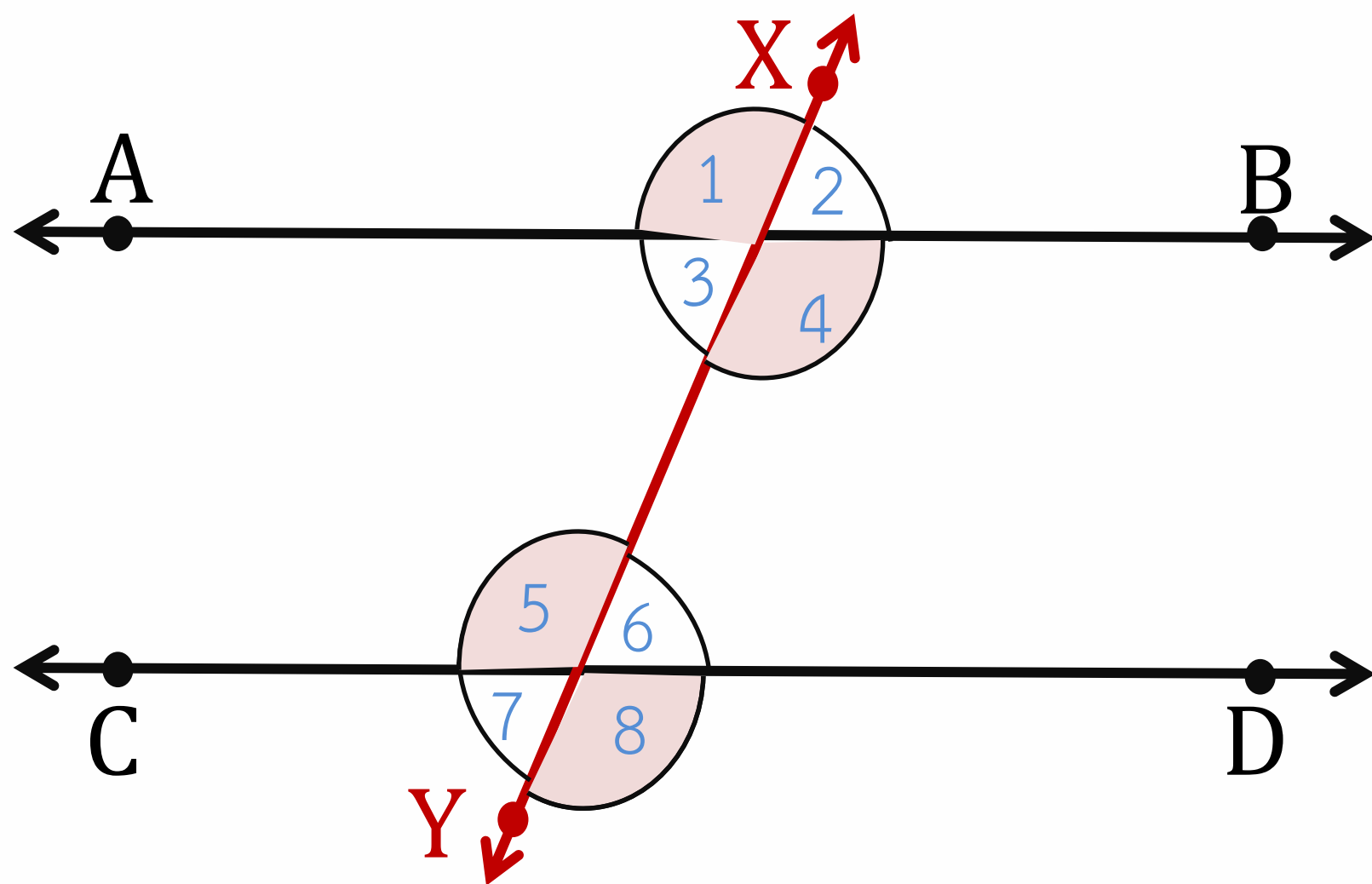


พิจารณา $\hat{5}$ ถึง $\hat{6}$ มุมใดมีขนาดเท่ากับ $\hat{4}$ เพราะเหตุใด

$\hat{5}$ เพราะ $\hat{5}$ เป็นมุมแย้งกับ $\hat{4}$



เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน

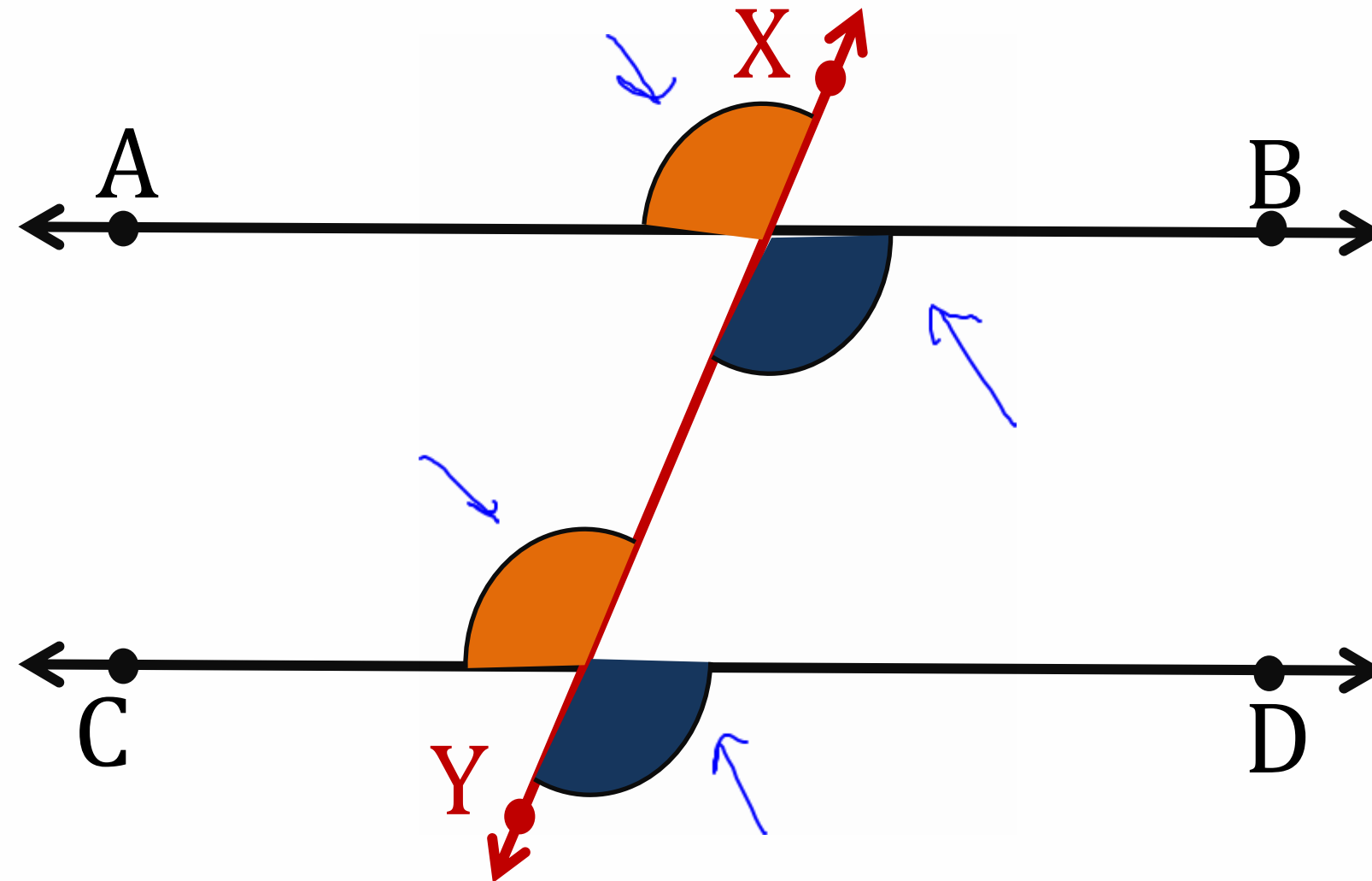


พิจารณา $\hat{7}$ ถึง $\hat{8}$ มุมใดมีขนาดเท่ากับ $\hat{5}$ เพราะเหตุใด

$\hat{8}$ เพราะ $\hat{8}$ เป็นมุมตรงข้ามกับ $\hat{5}$



เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน



ทฤษฎีบท

“เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน”



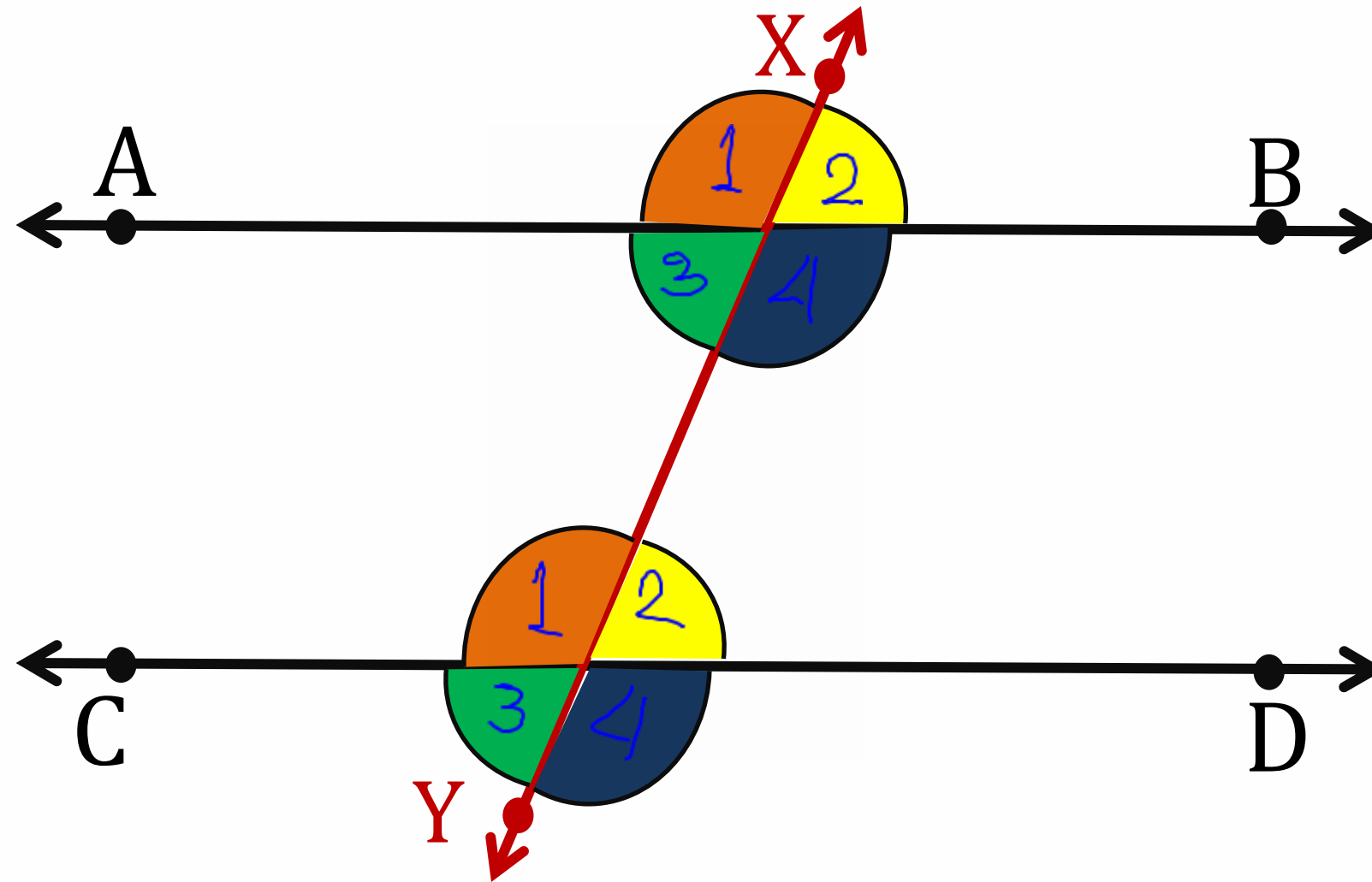
เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน

จากทฤษฎีบทข้างต้น เราสามารถพิจารณาได้ ดังนี้

- ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
- ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากันแล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



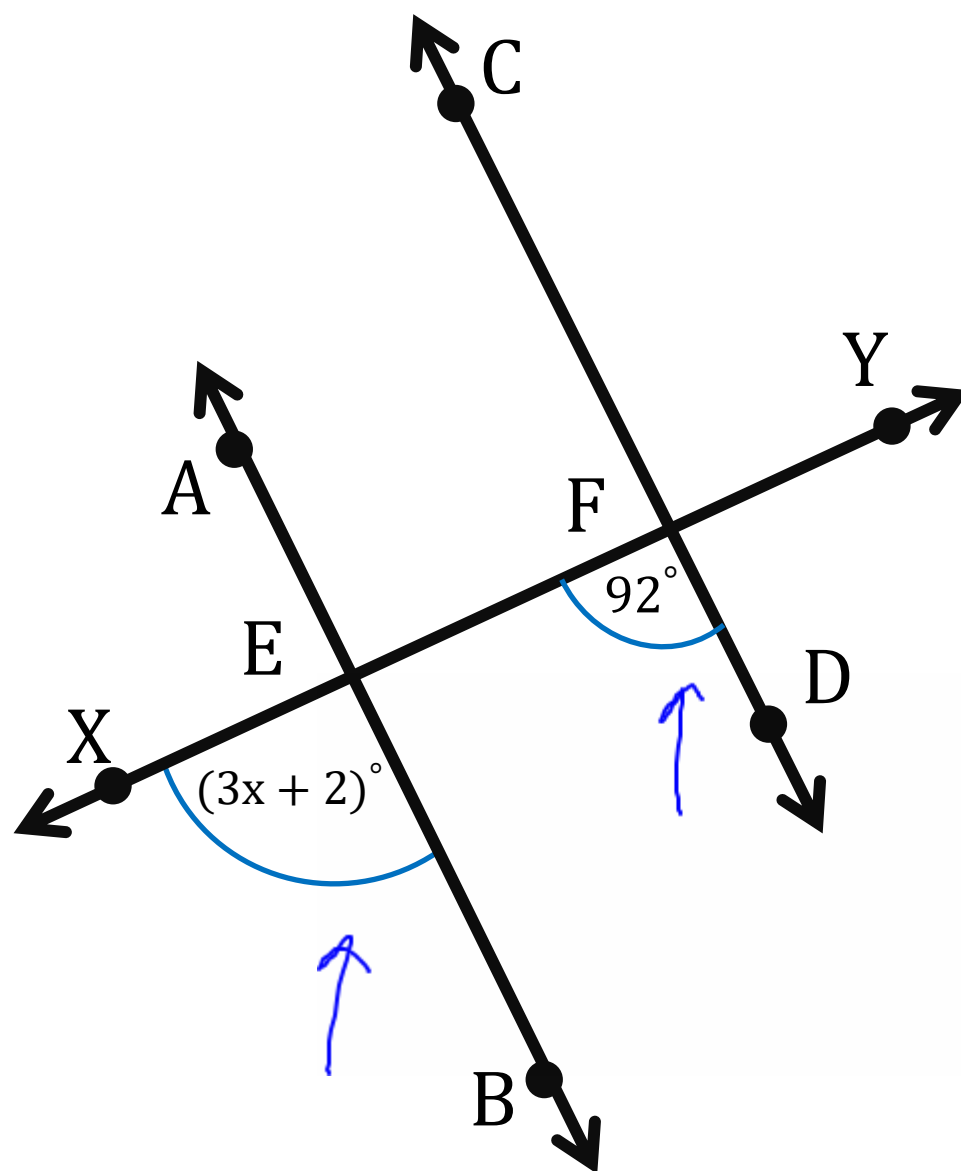
เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน





ตัวอย่างที่ 1

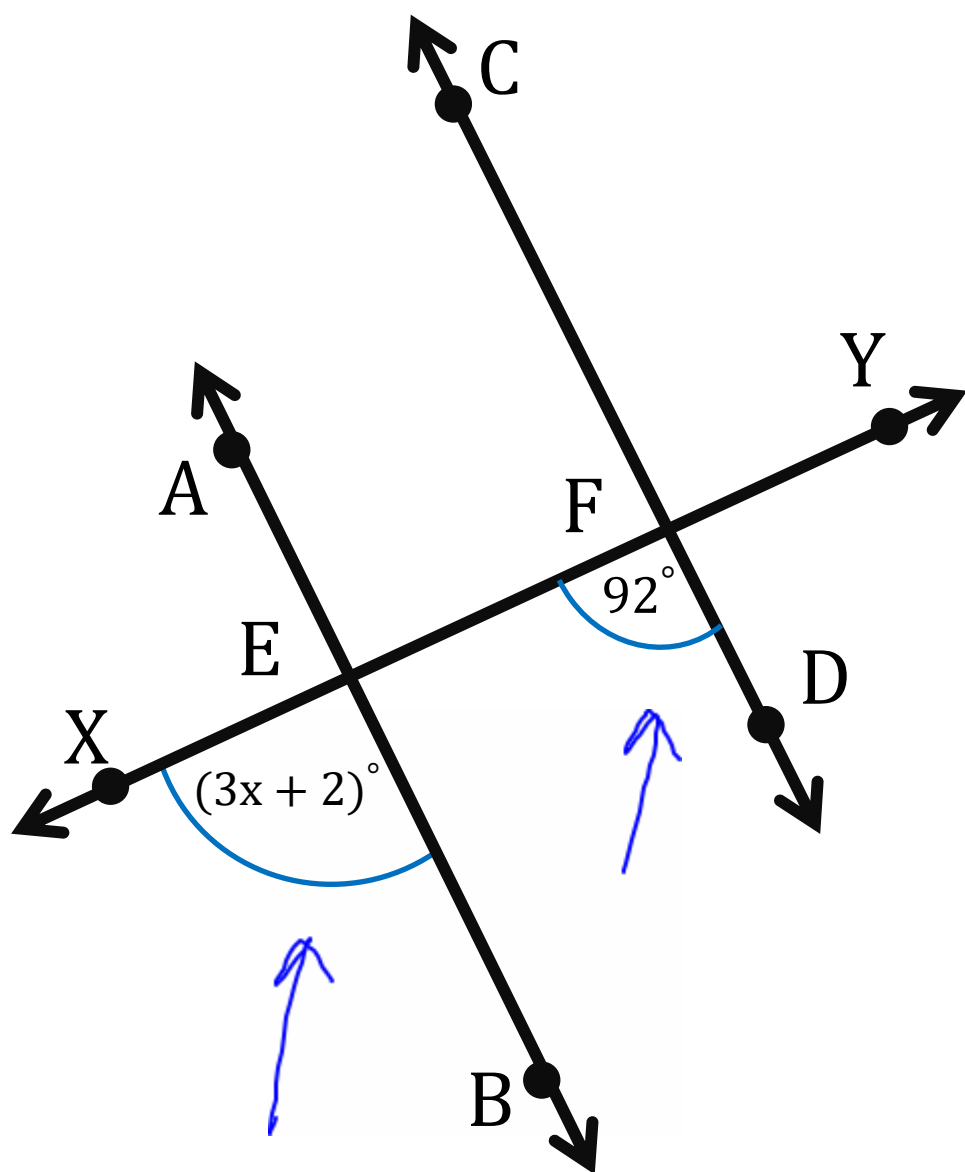
ตัวอย่างที่ 1 จากรูป $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ X





ตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ X



วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด

$\angle XEB = \angle EFD$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีตัด

แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่

ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

มีขนาดเท่ากัน)

นั่นคือ $3X + 2 = 92$

$$3X = 90$$

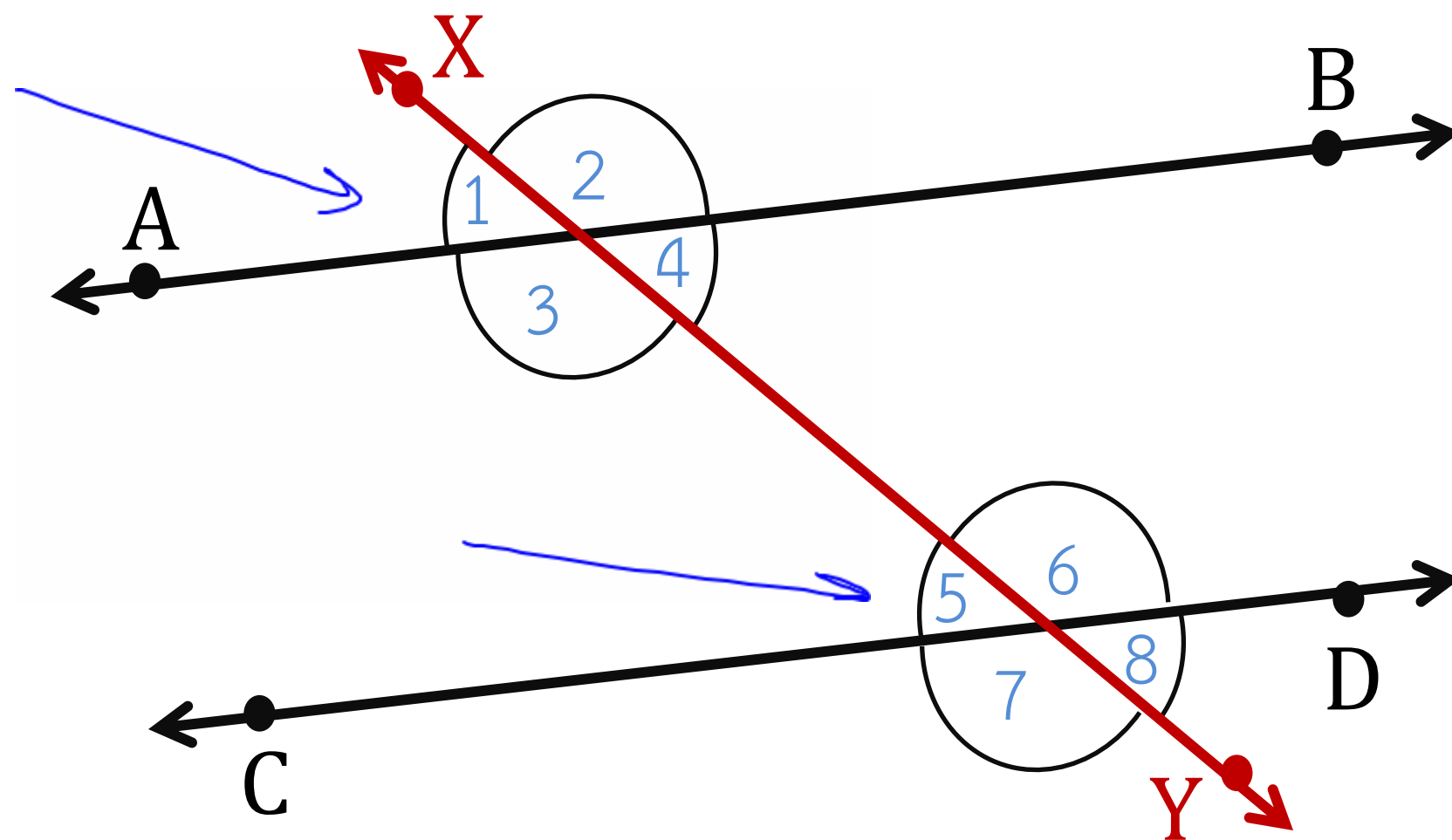
ดังนั้น

$$X = 30$$



ตัวอย่างที่ 2

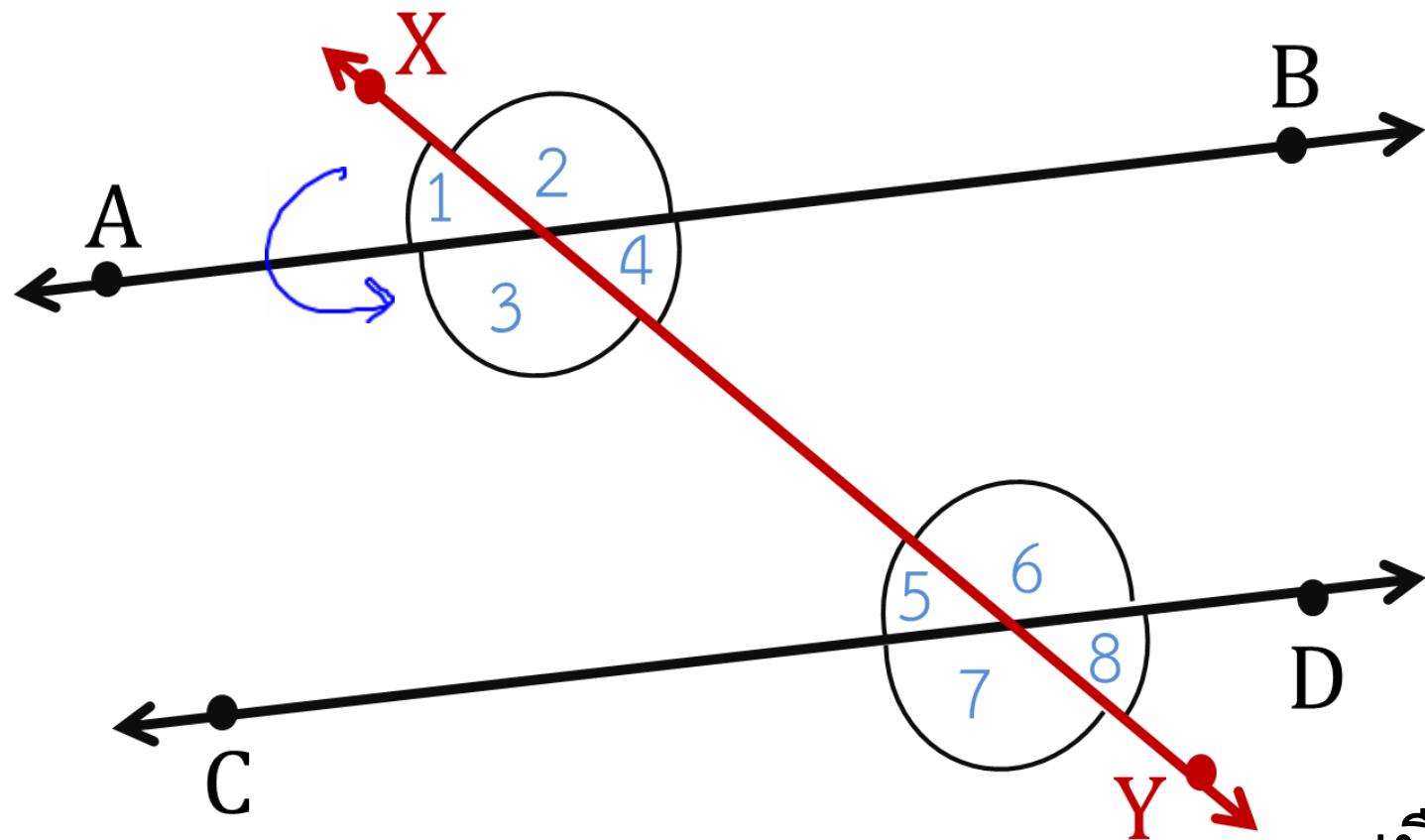
ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด โดยมี $\hat{1} = \hat{5}$ จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$





ตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด โดยมี $\hat{1} = \hat{5}$ จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่มี $\overline{MN}$ เป็นเส้นตัด โดยมี $\hat{1} = \hat{5}$
ต้องพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

พิสูจน์ $\hat{1} + \hat{3} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

$\hat{1} = \hat{5}$ (กำหนดให้)

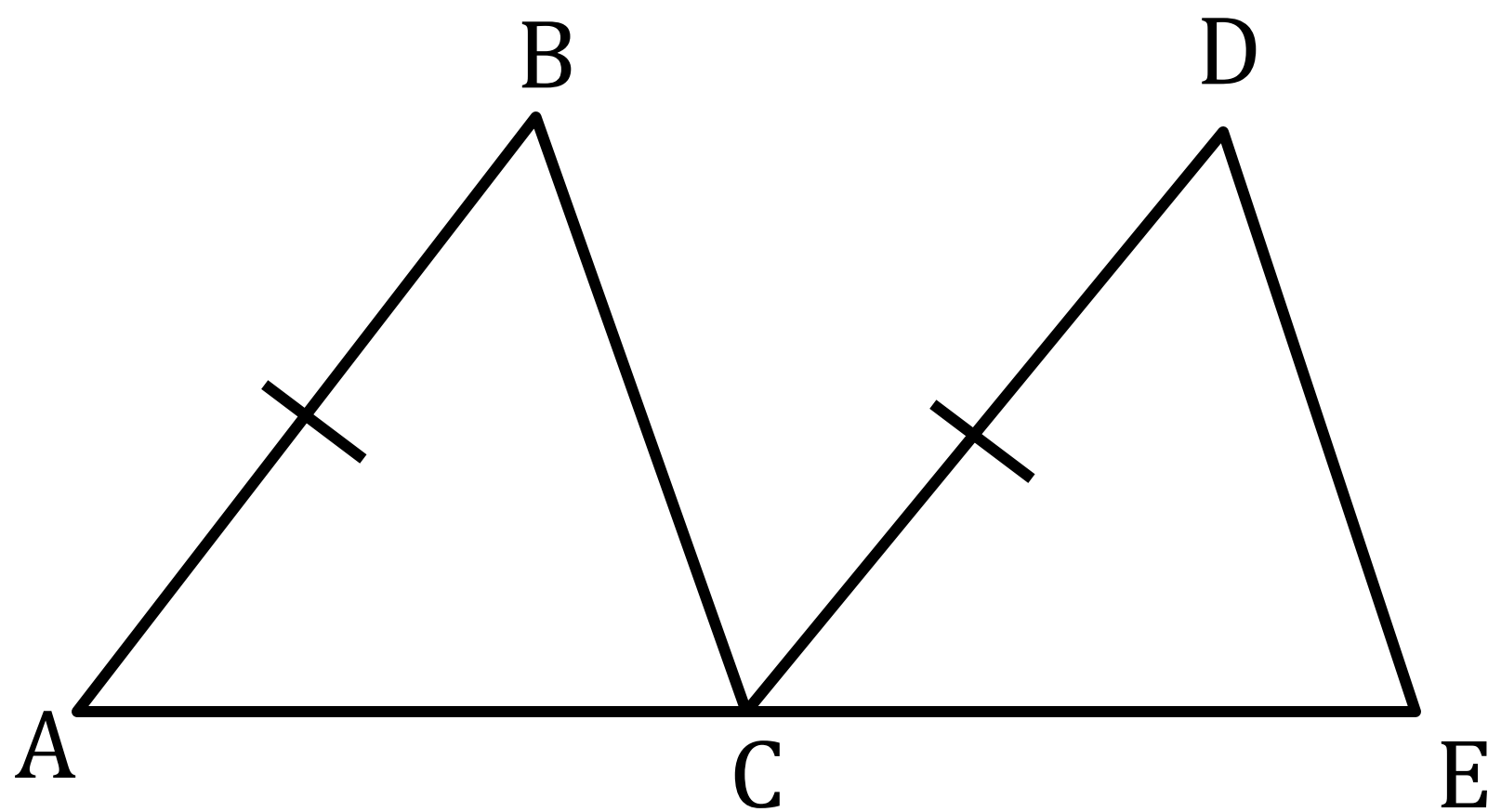
$\hat{5} + \hat{3} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

เนื่องจาก $\hat{3}$ และ $\hat{5}$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด $\overleftrightarrow{MN}$
 $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้ขนาดมุมภายในที่อยู่
บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180° แล้ว เส้นตรงคู่ นั้นขนานกัน)



ตัวอย่างที่ 3

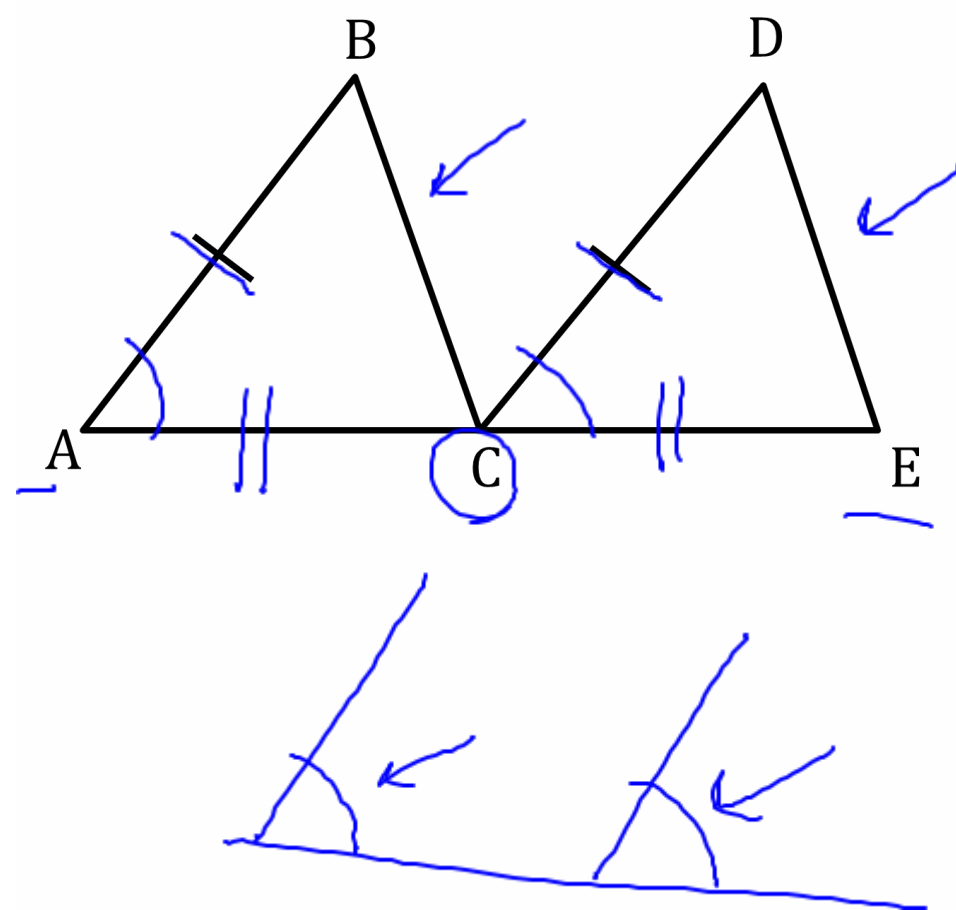
ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $AB = CD$ และจุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AE}$ จงแสดงว่า $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$





ตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AB = CD$ และจุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AE}$ จงแสดงว่า $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$



พิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle DCE$

$AB = CD$ (กำหนดให้)

$\angle BAC = \angle CED$ (มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามกันตัด
ได้ยอดกันเสมอ/เส้นตัด)

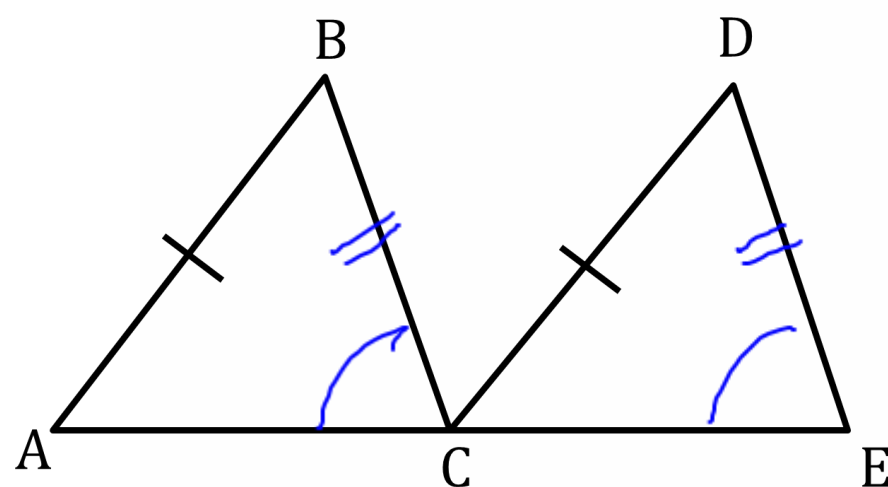
$AC = CE$ (จุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AE}$)

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DCE$ (ด้าน-มุม-ด้าน)



ตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $AB = CD$ และจุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AE}$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$



จะได้ $\angle BCA = \angle DEC$ (มุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยม
สลับรูปที่เท่ากันทุกประการ)

นั่นคือ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง
แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามกัน
ได้ยกกันแล้วเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรง
คู่ขนานกัน)



แบบฝึกหัดที่ 3

เส้นขนานกับมุมภายใน

และมุมภายนอก (1)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

แบบฝึกหัด 3 เรื่อง เส้นขนานกับมุมภายในและมุมภายนอก (1)

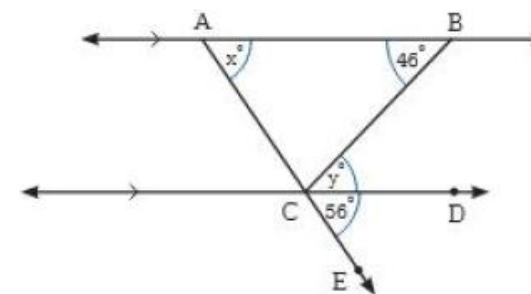
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เส้นขนาน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ตอนที่ 1

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

1. จากรูป $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ จงหาค่าของ $x - y$



วิธีทำ.....

.....

.....

.....

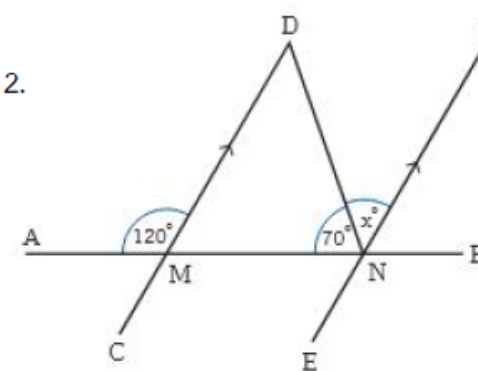
.....

.....

.....

.....

- 2.



วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

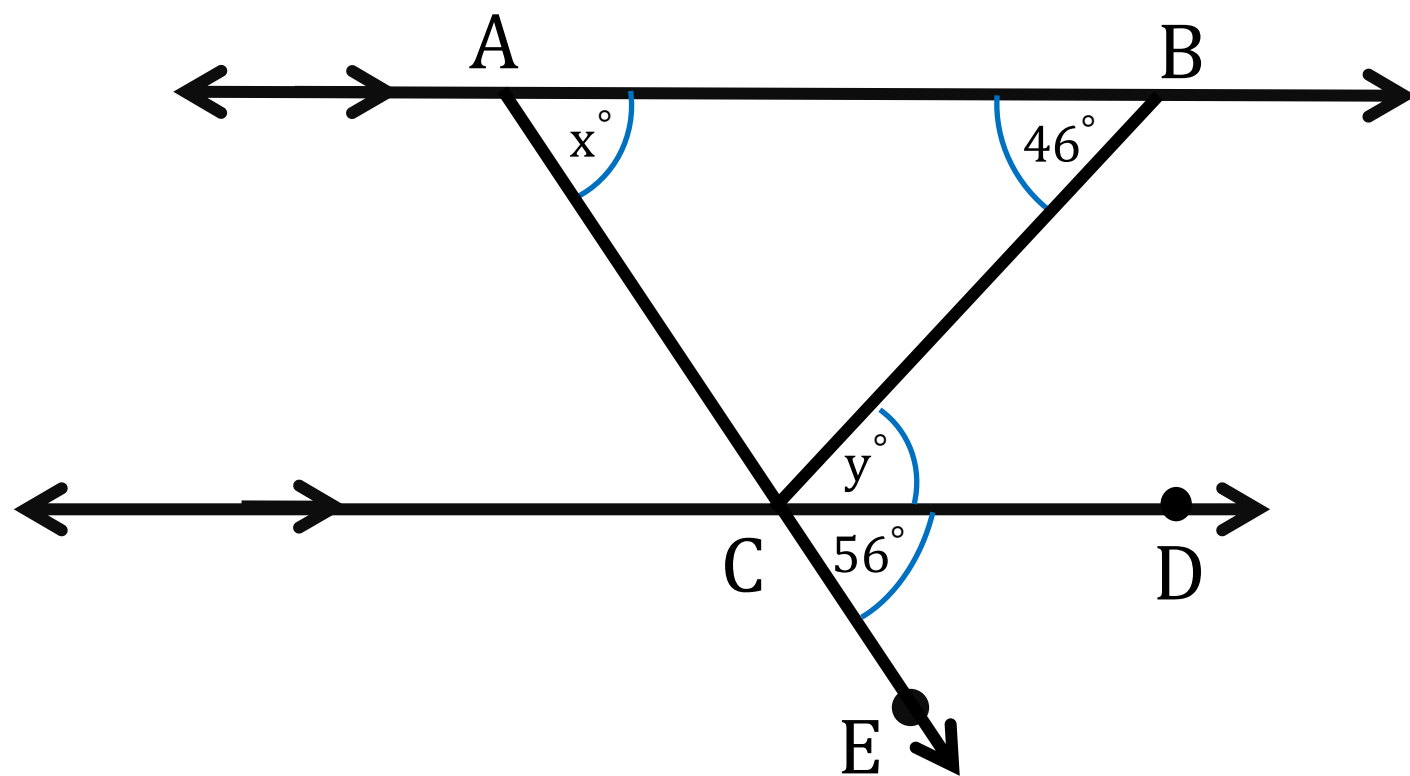
.....



แบบฝึกหัดที่ 3

ตอนที่ 1 คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

1. จากรูป $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ $X - Y$

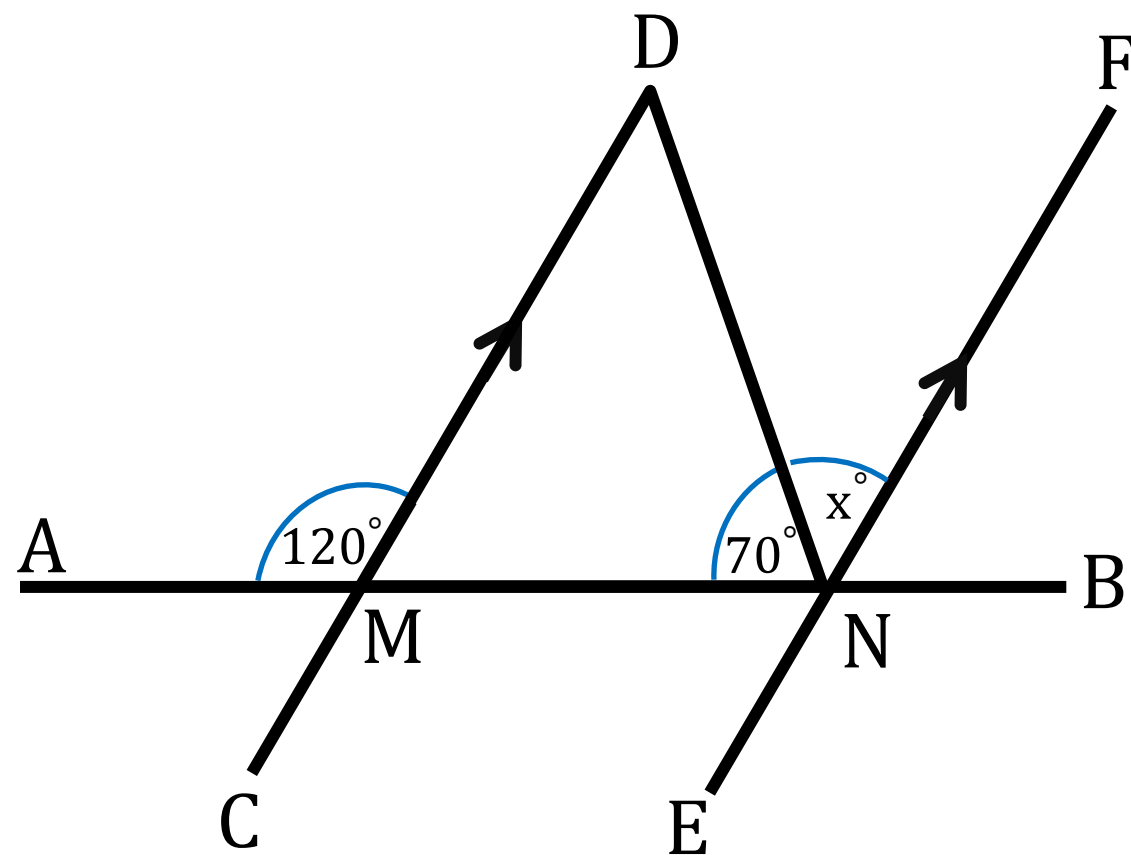




แบบฝึกหัดที่ 3

ตอนที่ 1 คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

2. จากรูป $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ จงหาค่าของ X

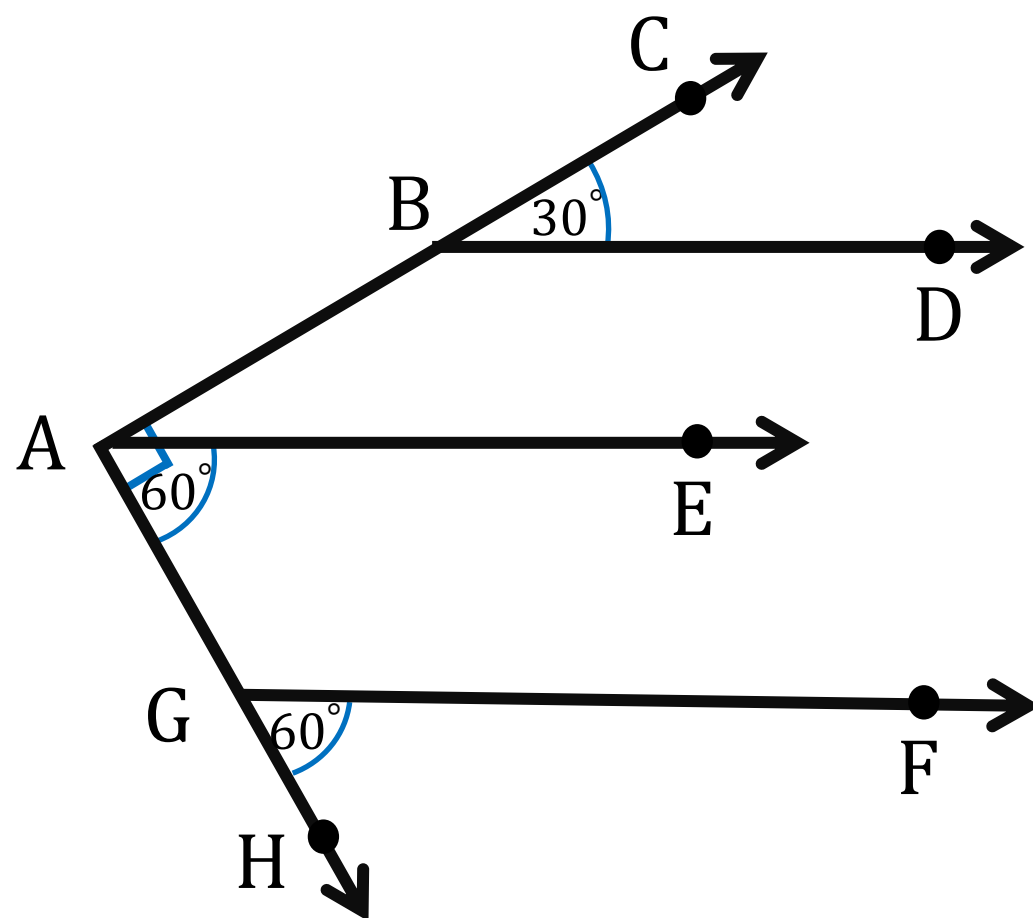




แบบฝึกหัดที่ 3

ตอนที่ 1 คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

3. จากรูปที่กำหนดให้ จงแสดงว่ารังสีคู่ใดขนานกัน





เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3

เส้นขนานกับมุมภายใน

และมุมภายนอก (1)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

แบบฝึกหัด 3 เรื่อง เส้นขนานกับมุมภายในและมุมภายนอก (1)

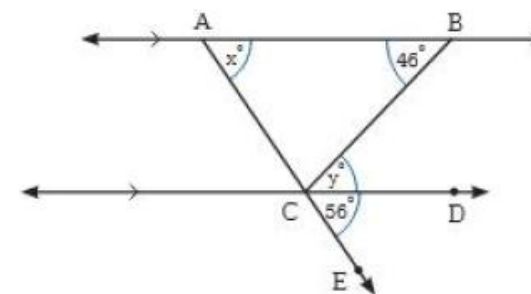
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เส้นขนาน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ตอนที่ 1

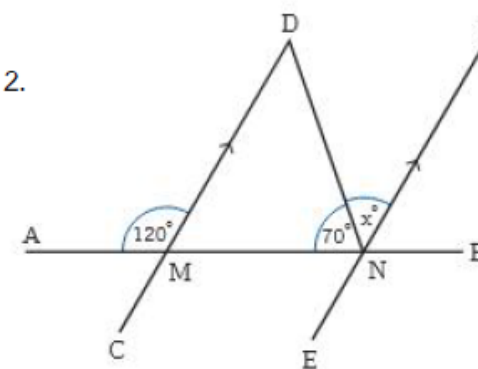
คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

1. จากรูป $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ จงหาค่าของ $x - y$



วิธีทำ.....

- 2.



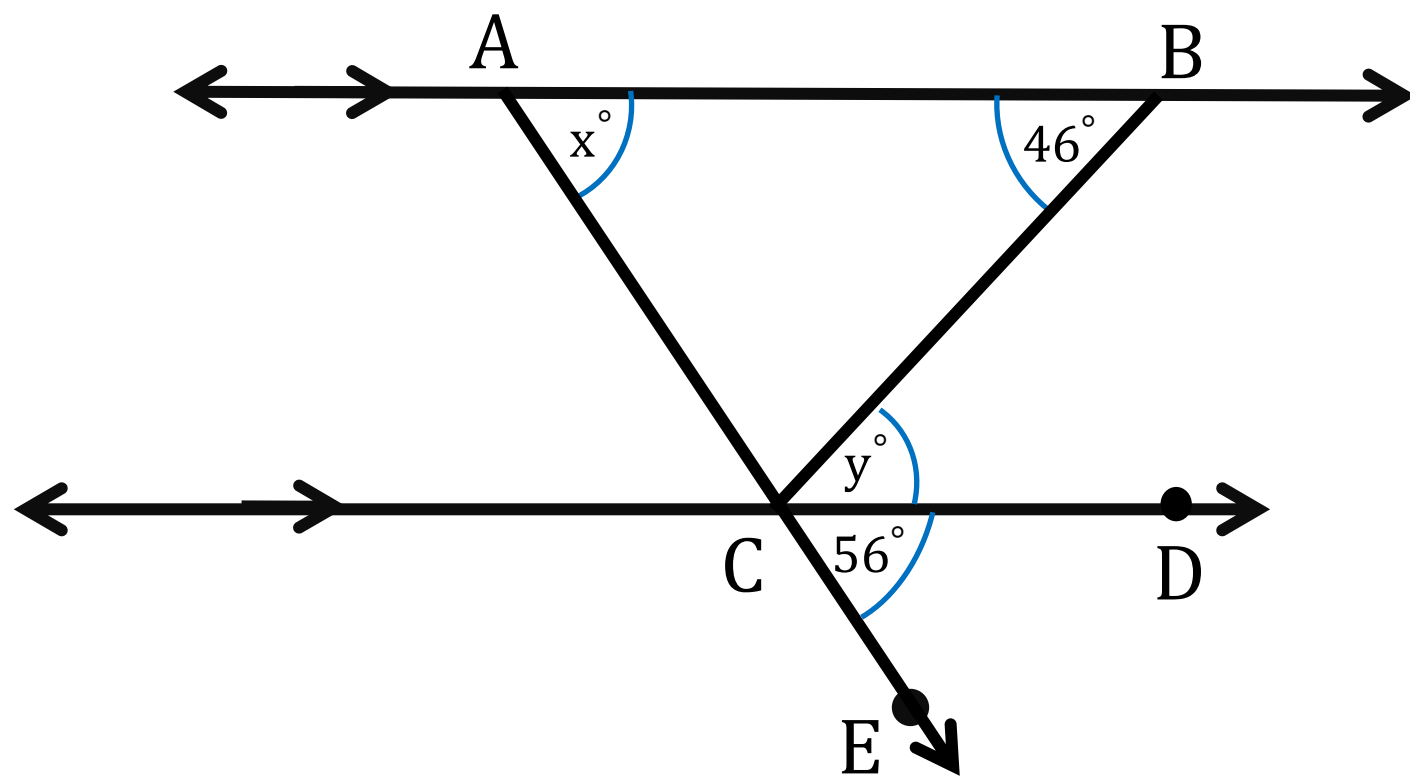
วิธีทำ.....



แบบฝึกหัดที่ 3

ตอนที่ 1 คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

1. จากรูป $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่าของ $X - Y$

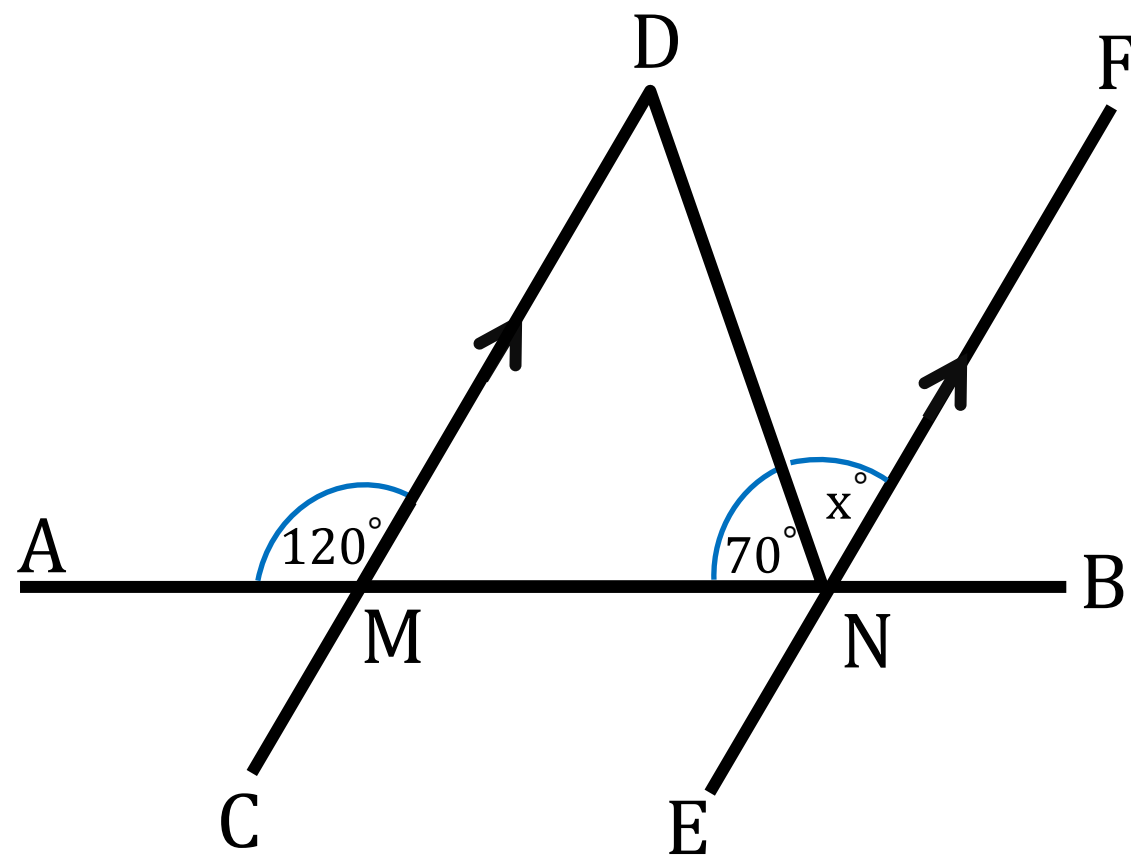




แบบฝึกหัดที่ 3

ตอนที่ 1 คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

2. จากรูป $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ จงหาค่าของ X

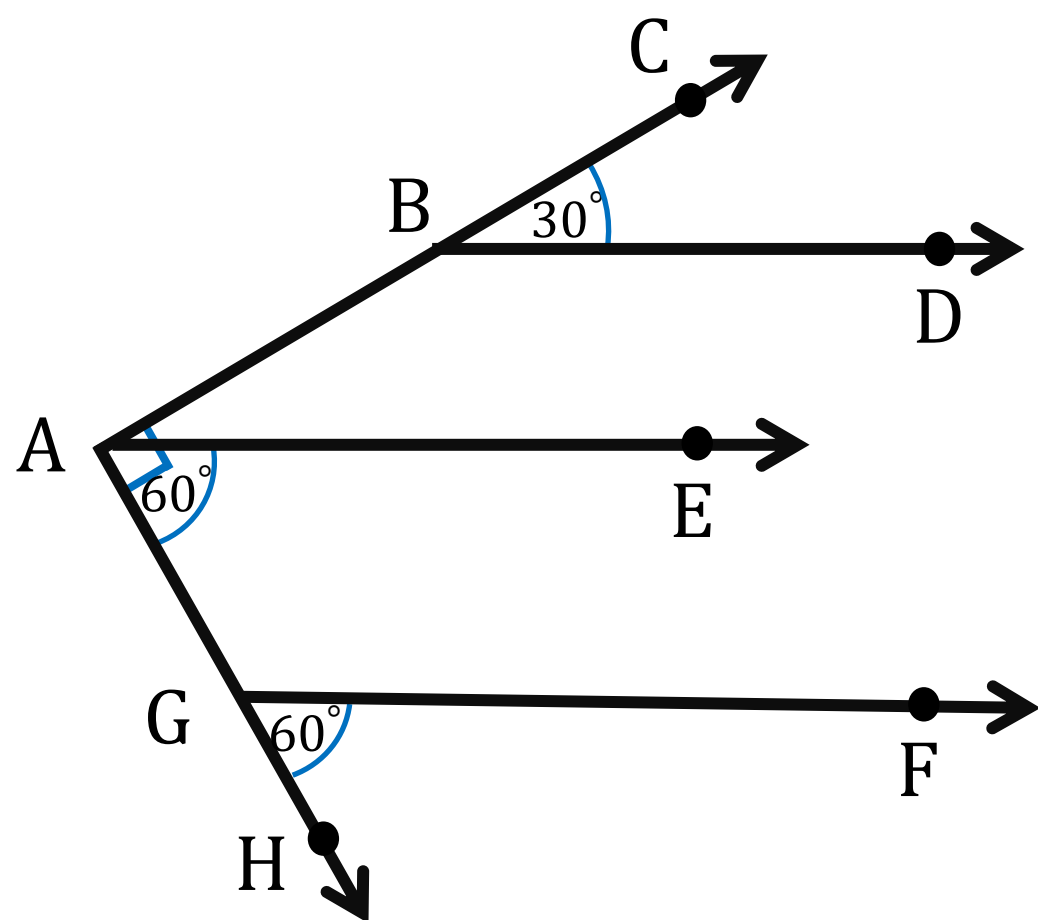




แบบฝึกหัดที่ 3

ตอนที่ 1 คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

3. จากรูปที่กำหนดให้ จงแสดงว่ารังสีคู่ใดขนานกัน





แบบฝึกหัดที่ 4

เส้นขนานกับมุมภายใน

และมุมภายนอก (2)



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th)

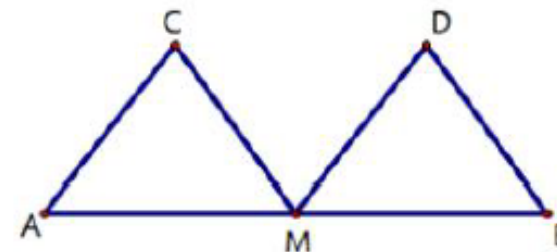
แบบฝึกหัด 4 เรื่อง เส้นขนานกับมุมภายในและมุมภายนอก (2)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เส้นขนาน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง เส้นขนานกับมุมภายนอกและมุมภายใน (2)

รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค22102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

1. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AC} \parallel \overline{MD}$ และ $\overline{CM} \parallel \overline{DB}$ และ $AM = MB$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ACM \cong \triangle MDB$



กำหนดให้ $\overline{AC} \parallel \overline{MD}$ และ $\overline{CM} \parallel \overline{DB}$ และ $AM = MB$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ACM \cong \triangle MDB$

พิสูจน์

$\overline{AC} \parallel \overline{MD}$ และ $\overline{CM} \parallel \overline{DB}$

(โจทย์กำหนดให้)

$\angle AMC = \underline{\hspace{2cm}}$

(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอก
และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)

$\angle CAM = \underline{\hspace{2cm}}$

$AM = \underline{\hspace{2cm}}$

$\triangle ACM \cong \underline{\hspace{2cm}}$

(โจทย์กำหนดให้)



สรุปบทเรียน

- เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน



บทเรียนครั้งต่อไป

การแก้ปัญหาเกี่ยวกับ
เส้นขนาน





สิ่งที่ต้องเตรียม

แบบฝึกหัดที่ 5 : การแก้ปัญหเกี่ยวกับเส้นขนาน



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่

www.dltv.ac.th)



