รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค23102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยที่ 2 วงกลม

เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม (2)

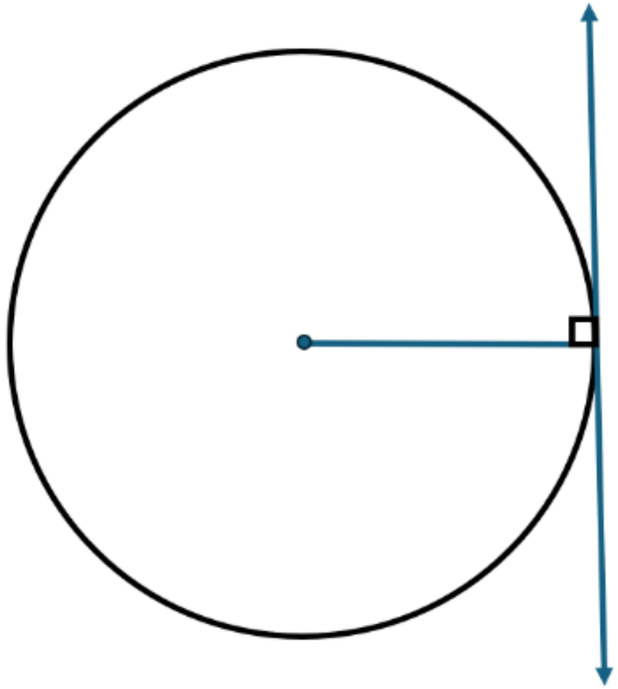
ครูผู้สอน ครูสรวงรัตน์ เดชะชาติ

เส้นสัมผัสวงกลม (2)

จุดประสงค์การเรียนรู้

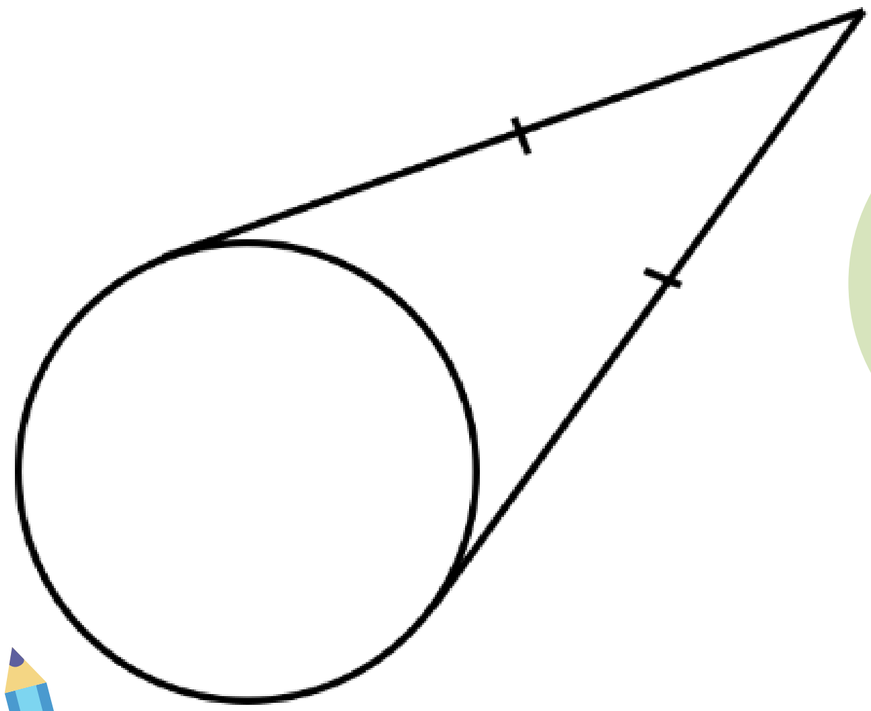
นักเรียนสามารถหาขนาดของมุมโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี



เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม



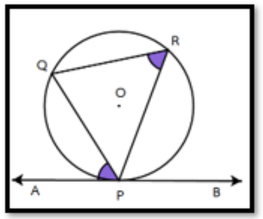
ส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุดจุดหนึ่ง
ภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกัน
จะยาวเท่ากัน

ใบกิจกรรม 5

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม

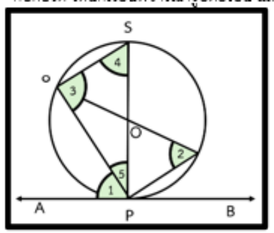
ใบกิจกรรม 5 : เส้นสัมผัสกับคอร์ดของวงกลม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3



รูปที่ 1

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด P โดยมี $\overline{PQ}$ เป็นคอร์ด และ $P\hat{P}Q$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม จากรูป เมื่อพิจารณาคอร์ด PQ เรียก $A\hat{P}Q$ ว่า **มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส P** ส่วนมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส เช่น $P\hat{R}Q$ นั้น จะเรียกว่า **มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด PQ**

เพื่อสำรวจความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัส กับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้ แล้วเติมเหตุผลลงในตารางให้สมบูรณ์



รูปที่ 2

จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด P

$A\hat{P}Q$ เป็นมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส P

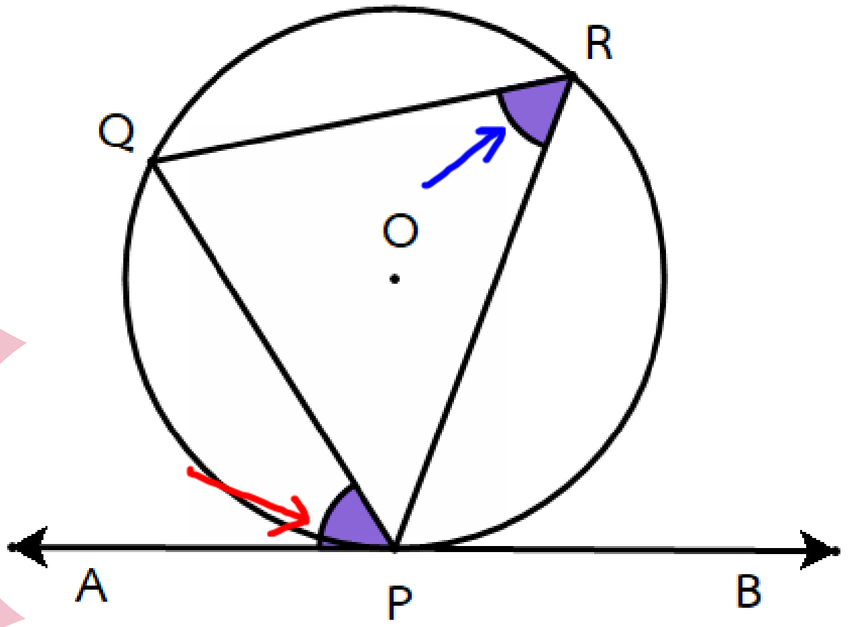
$R\hat{P}Q$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด PQ

จะแสดงว่า $A\hat{P}Q = R\hat{P}Q$ หรือ $\hat{1} = \hat{2}$

สร้างเส้นผ่านศูนย์กลาง PS แล้วลาก $\overline{SQ}$

ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
1	$\hat{3} = 90°$	
2	$\hat{4} + \hat{5} = 90°$	
3	$\hat{1} + \hat{5} = 90°$	
4	$\hat{1} = \hat{4}$	
5	$\hat{4} = \hat{2}$	
6	$\hat{1} = \hat{2}$	

มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัส

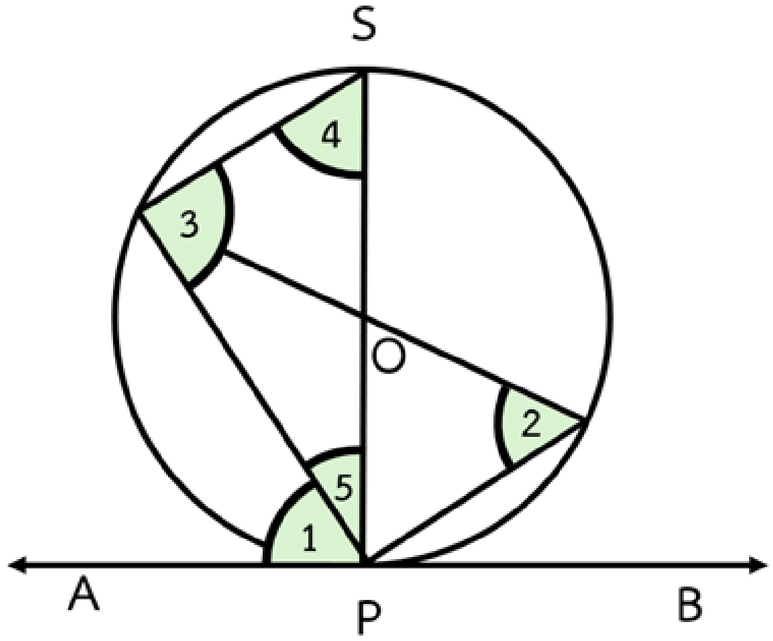


กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
$\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด P โดยมี $\overline{PQ}$ เป็นคอร์ด
และ $P\hat{R}Q$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม

จากรูป เมื่อพิจารณาคอร์ด PQ เรียก $A\hat{P}Q$ ว่า
มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส P

ส่วนมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่คนละข้างกับมุมที่เกิดจากคอร์ดและ
เส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส เช่น $P\hat{R}Q$ นั้น
จะเรียกว่า มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด PQ

ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด



จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด P

$A\hat{P}Q$ เป็นมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส P

$R\hat{P}Q$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด PQ

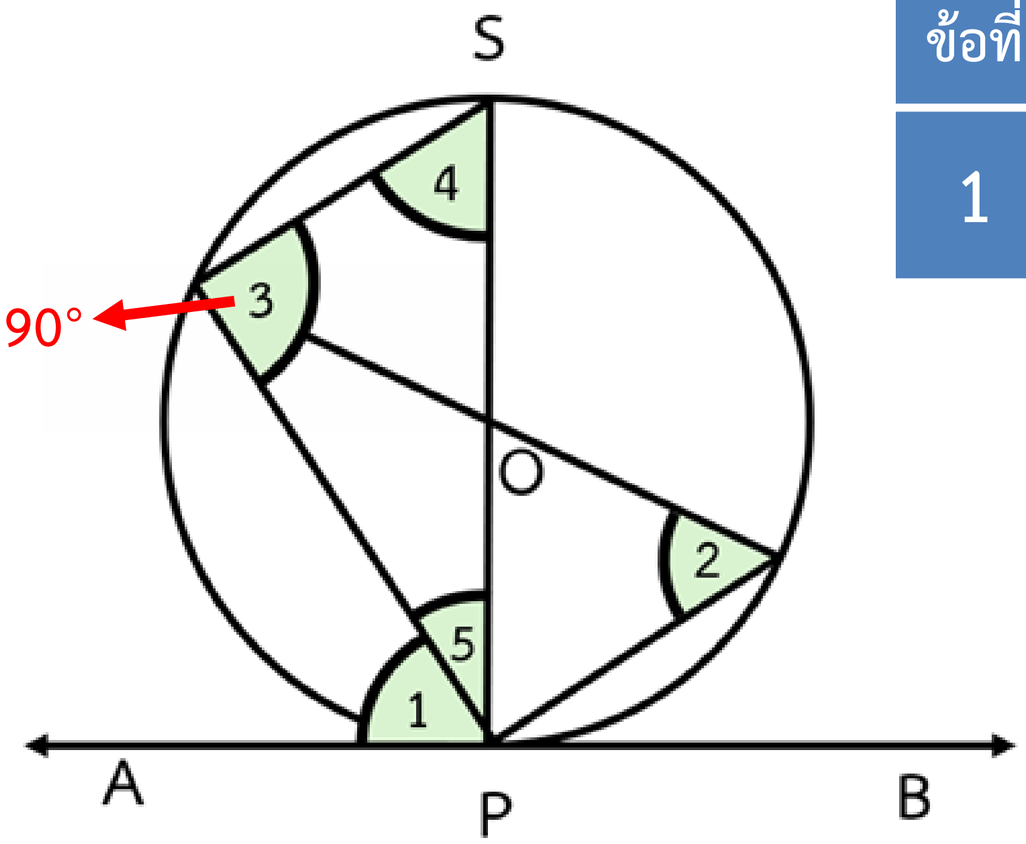
จะแสดงว่า $A\hat{P}Q = R\hat{P}Q$ หรือ $\hat{1} = \hat{2}$

สร้างเส้นผ่านศูนย์กลาง PS แล้วลาก $\overline{SQ}$

เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม

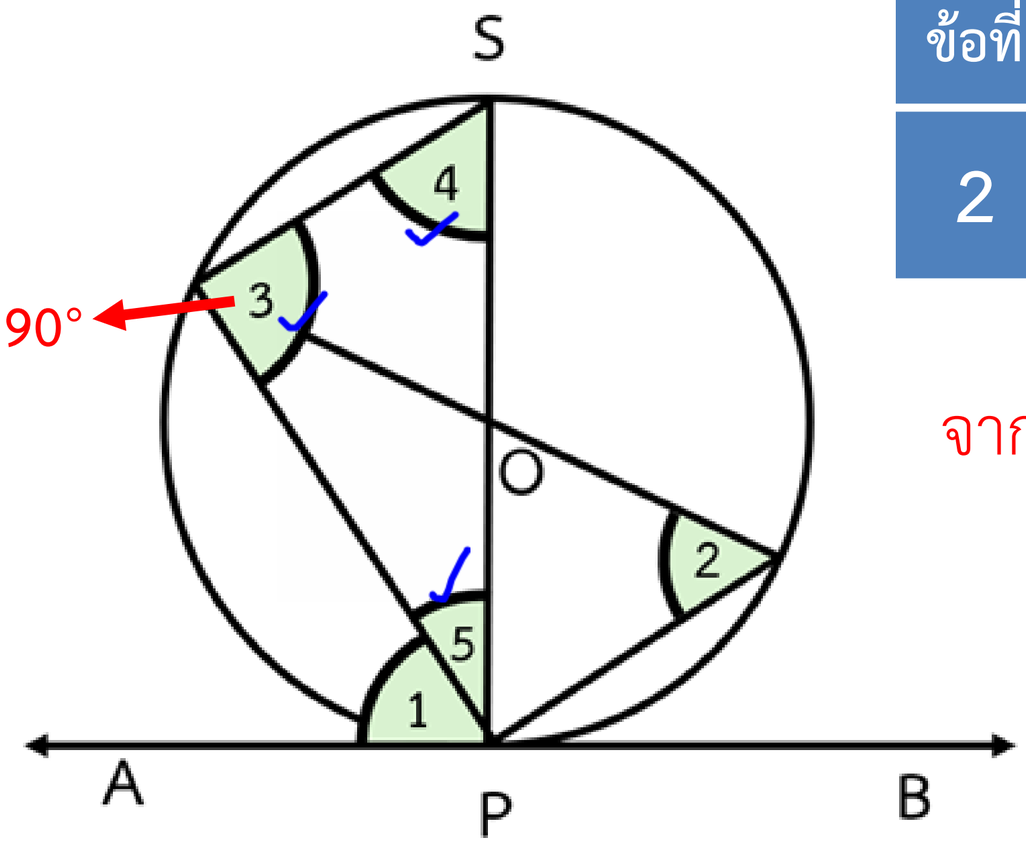
ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
1	$\hat{3} = 90°$	
2	$\hat{4} + \hat{5} = 90°$	
3	$\hat{1} + \hat{5} = 90°$	
4	$\hat{1} = \hat{4}$	
5	$\hat{4} = \hat{2}$	
6	$\hat{1} = \hat{2}$	

เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม



ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
1	$\hat{3} = 90°$	ขนาดมุมในครึ่งวงกลม

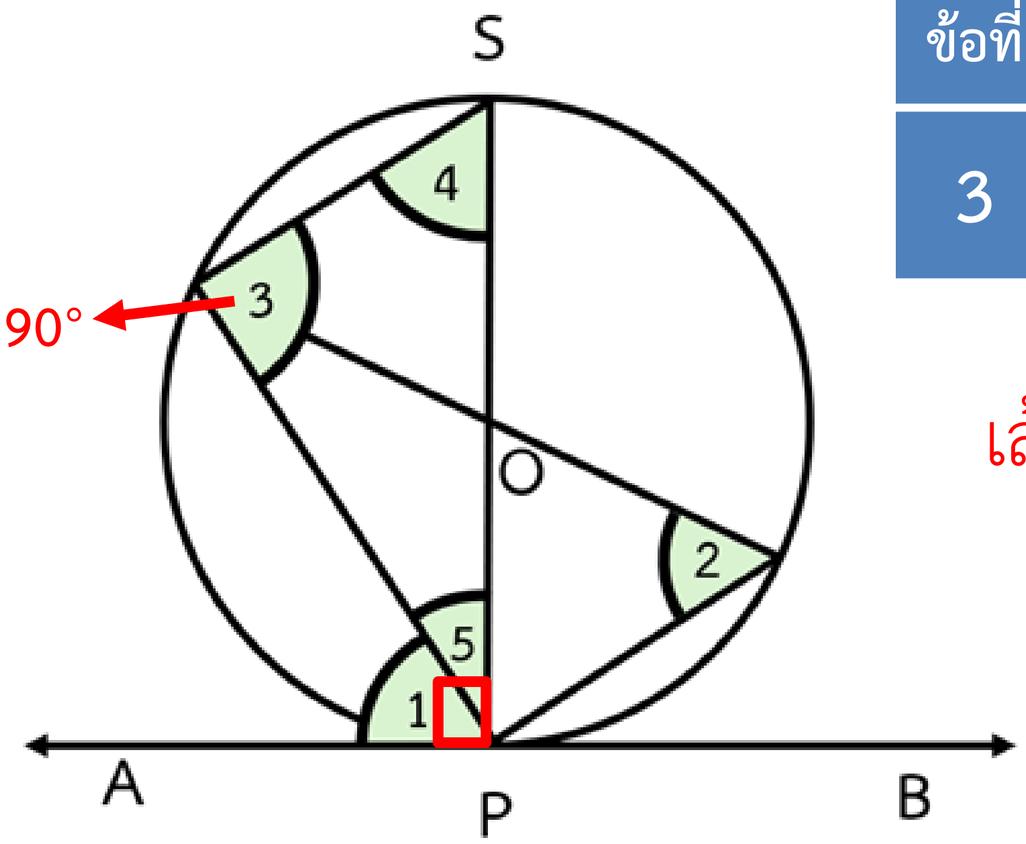
เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม



ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
2	$\hat{4} + \hat{5} = 90°$	

จากข้อ 1) และขนาดของมุมภายในทั้งสามมุม ของรูปสามเหลี่ยม รวมกันเป็น 180°

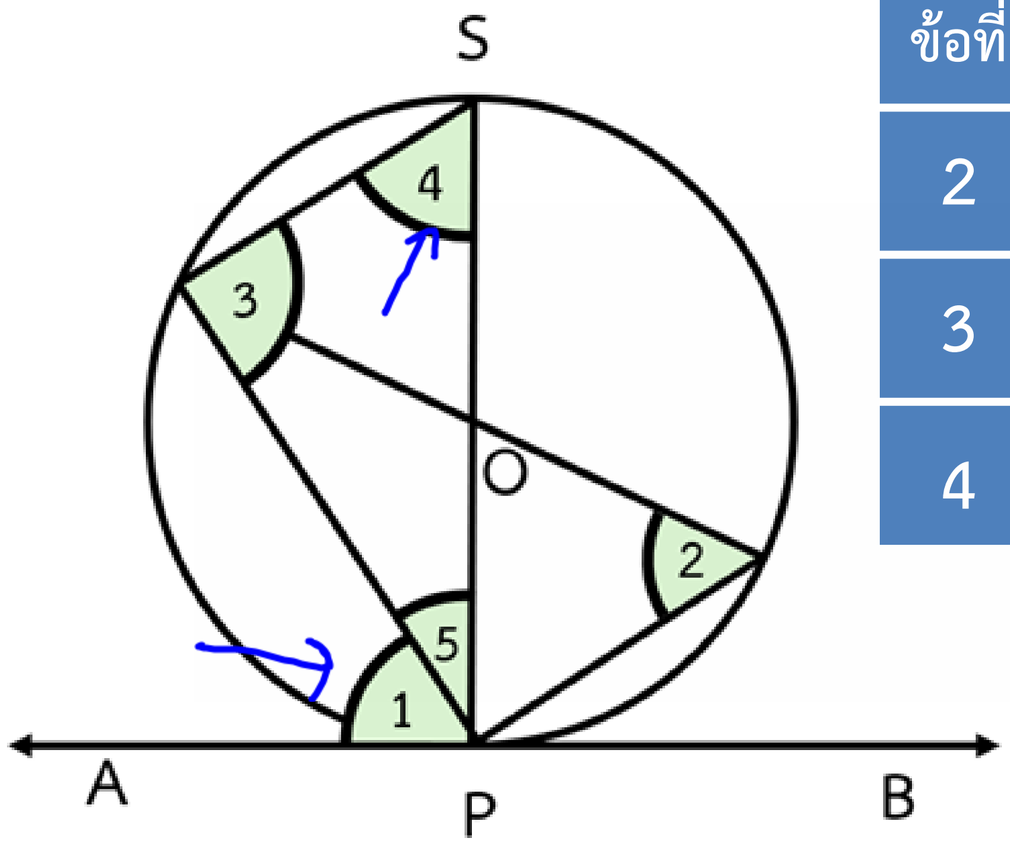
เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม



ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
3	$\hat{1} + \hat{5} = 90°$	

เส้นสัมผัสจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส

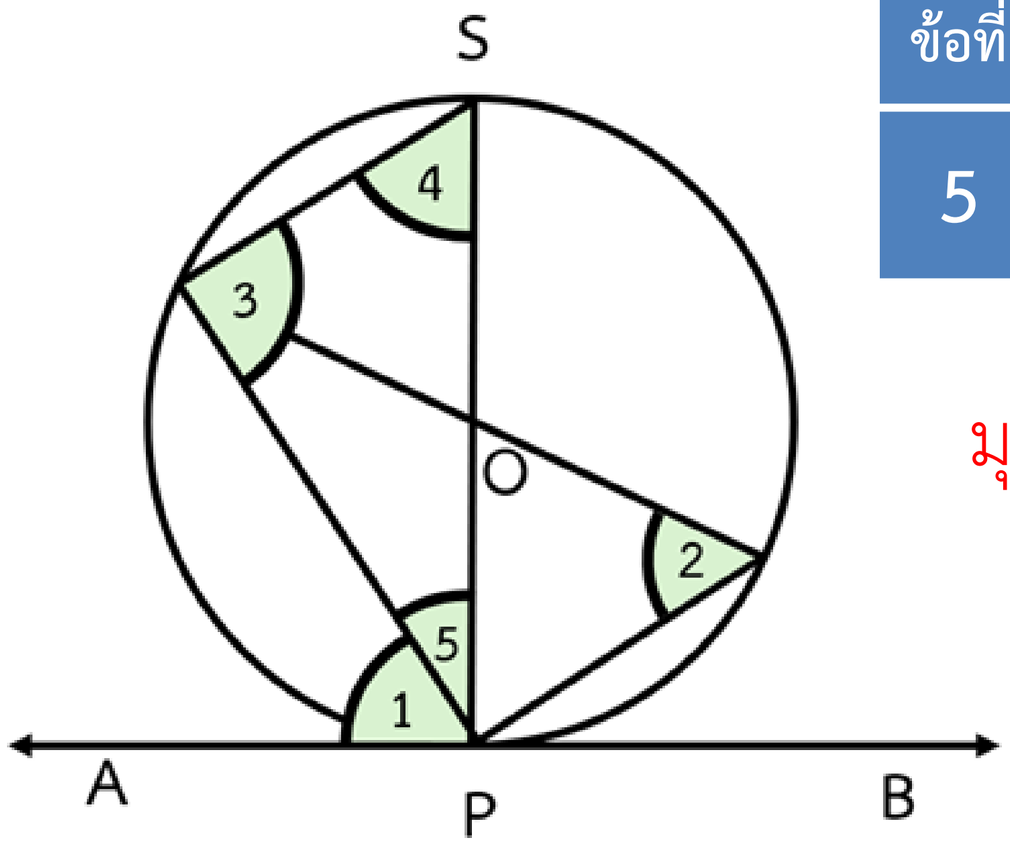
เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม



ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
2	$\hat{4} + \hat{5} = 90°$	
3	$\hat{1} + \hat{5} = 90°$	
4	$\hat{1} = \hat{4}$	

จากข้อ 2 – 3 และสมบัติของการเท่ากัน

เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม

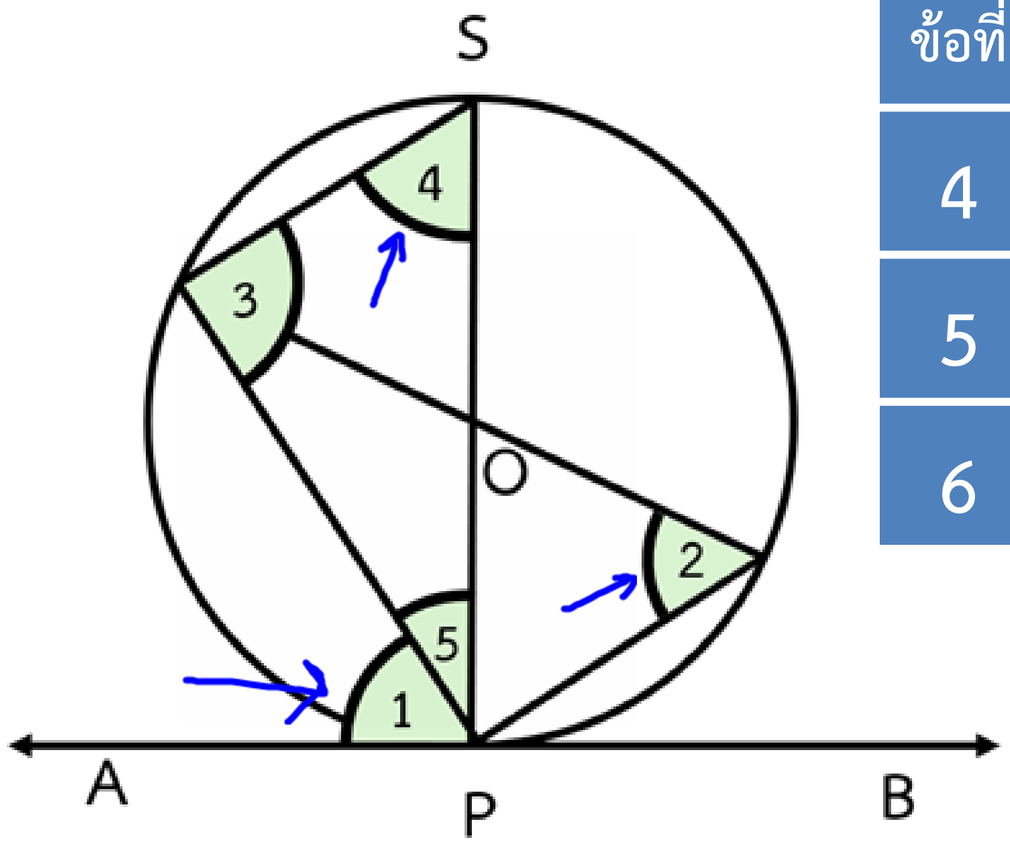


ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
5	$\hat{4} = \hat{2}$	

มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย

ส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน

เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม



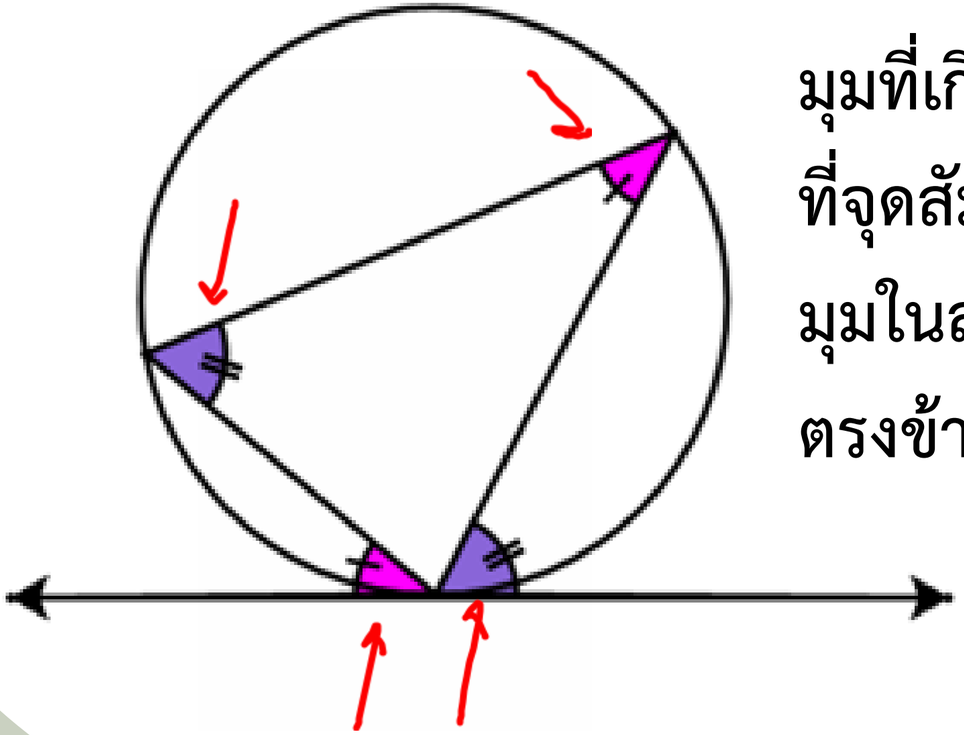
ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
4	$\hat{1} = \hat{4}$	
5	$\hat{4} = \hat{2}$	
6	$\hat{1} = \hat{2}$	

จากข้อ 4 – 5 และสมบัติของการเท่ากัน

เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม

ข้อที่	ข้อความ	เหตุผล
1	$\hat{3} = 90°$	ขนาดมุมในครึ่งวงกลม
2	$\hat{4} + \hat{5} = 90°$	จากข้อ 1) และขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°
3	$\hat{1} + \hat{5} = 90°$	เส้นสัมผัสจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส
4	$\hat{1} = \hat{4}$	จากข้อ 2 – 3 และสมบัติของการเท่ากัน
5	$\hat{4} = \hat{2}$	มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
6	$\hat{1} = \hat{2}$	จากข้อ 4 – 5 และสมบัติของการเท่ากัน

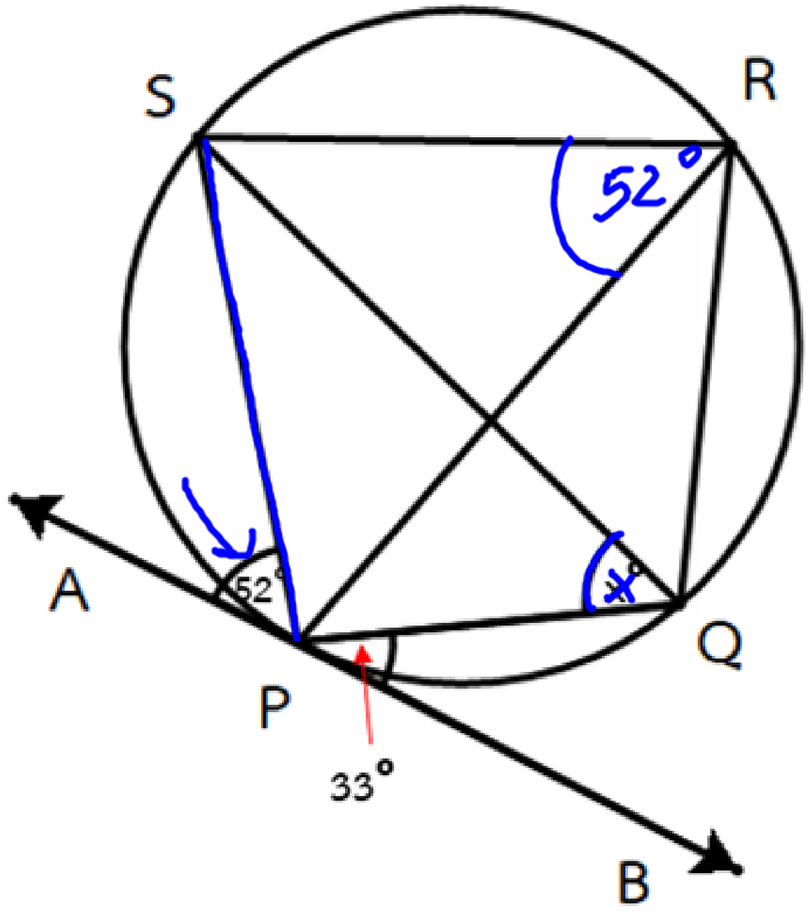
ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัส ที่จุดสัมผัสกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้



มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม ที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

ตัวอย่างที่ 1

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x เมื่อ P เป็นจุดสัมผัส

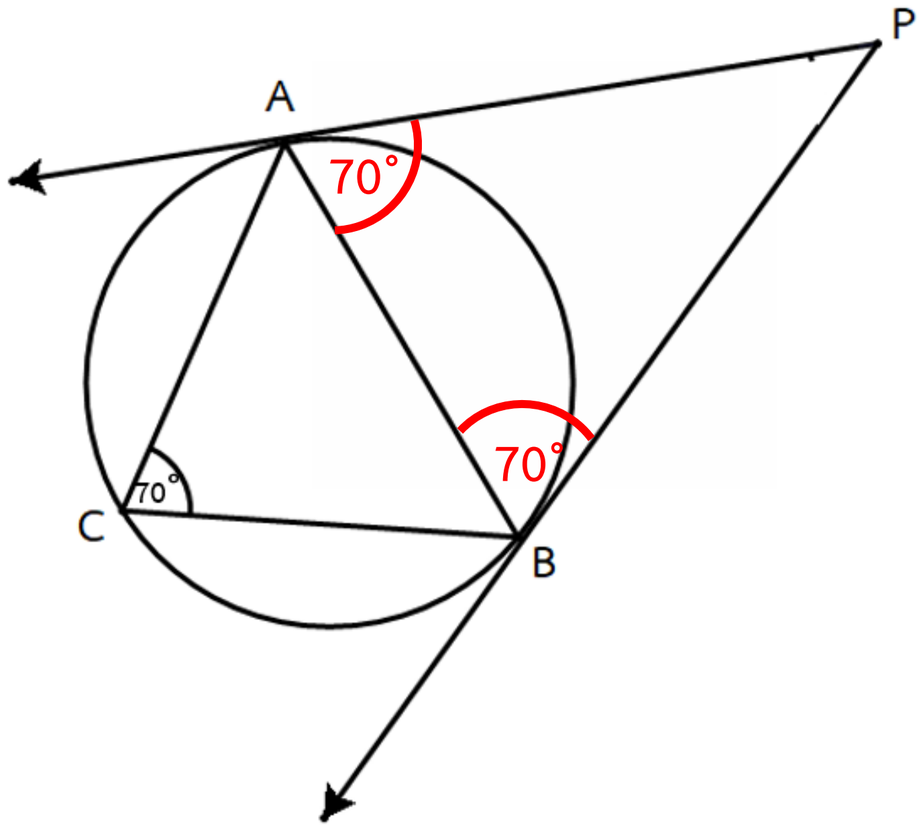


<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $A\hat{P}S = P\hat{Q}S$

ดังนั้น $x = 52^{\circ}$

ตัวอย่างที่ 2

จากรูป $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A และ B ตามลำดับ ถ้า $A\hat{C}B = 70°$ แล้ว จงหาขนาดของ $A\hat{P}B$



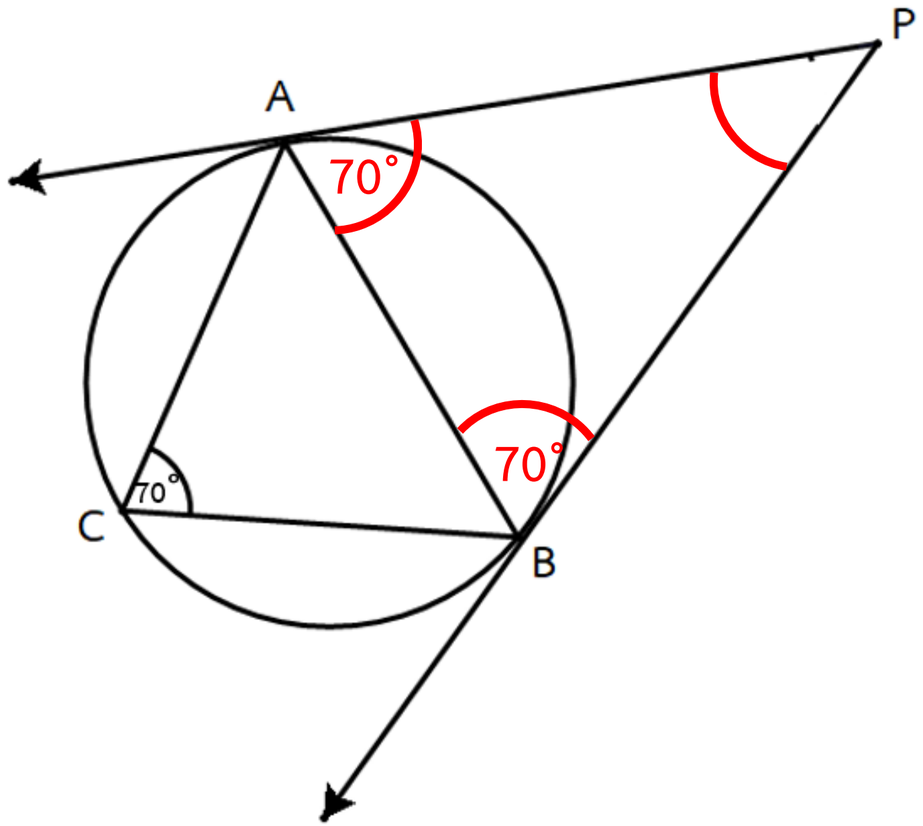
วิธีทำ เนื่องจาก $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดของวงกลม โดยมี $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PB}$ เป็นเส้นสัมผัส

จะได้ $B\hat{A}P = 70°$ และ $A\hat{B}P = 70°$

(มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

ตัวอย่างที่ 2

จากรูป $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A และ B ตามลำดับ ถ้า $A\hat{C}B = 70°$ แล้ว จงหาขนาดของ $A\hat{P}B$



<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดของวงกลม โดยมี $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PB}$ เป็นเส้นสัมผัส

จะได้ $B\hat{A}P = 70°$ และ $A\hat{B}P = 70°$

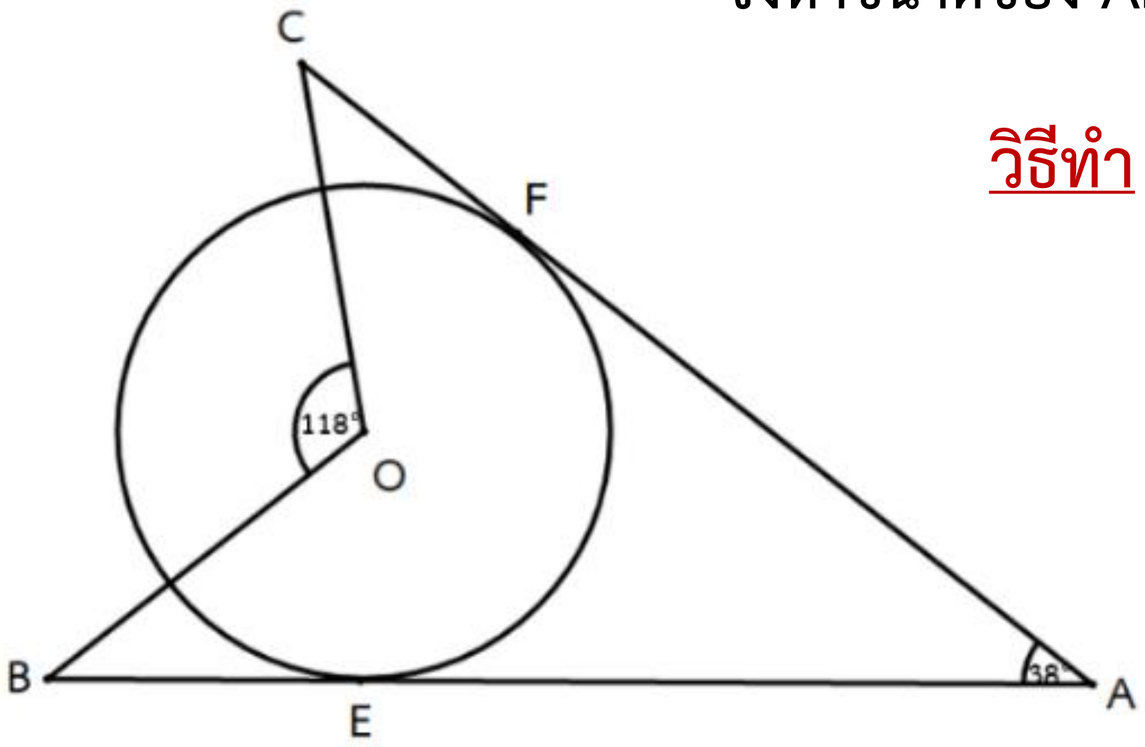
ดังนั้น $A\hat{P}B = 180 - (70 + 70)$

$= 40°$

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180 °)

ตัวอย่างที่ 3

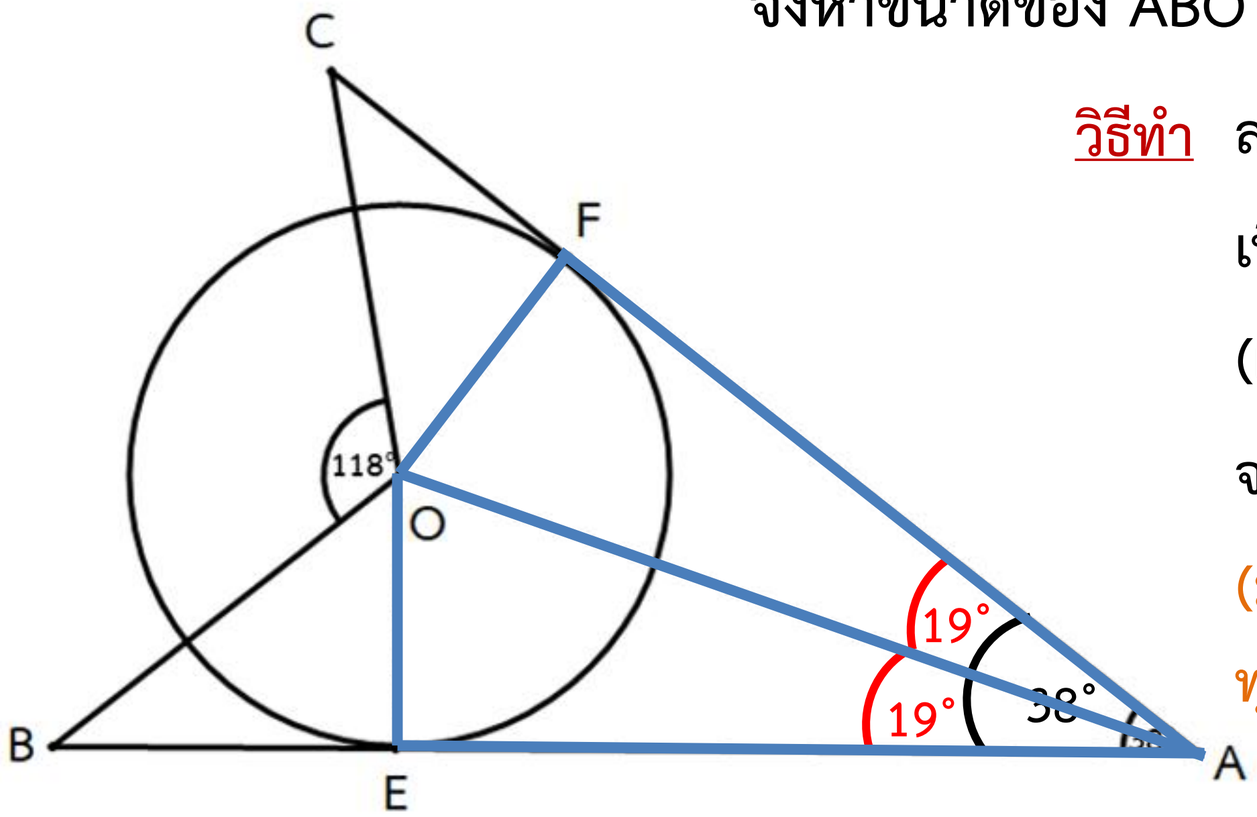
จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ จุด F ตามลำดับ AB = AC , $B\hat{A}C = 38°$ และ $B\hat{O}C = 118°$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}O$ และขนาดของ $A\hat{C}O$



วิธีทำ ลาก $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ และ $\overline{OA}$

ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ จุด F ตามลำดับ AB = AC , $B\hat{A}C = 38°$ และ $B\hat{O}C = 118°$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}O$ และขนาดของ $A\hat{C}O$



<u>วิธีทำ</u> ลาก $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ และ $\overline{OA}$

เนื่องจาก $\triangle AOE \cong \triangle AOF$

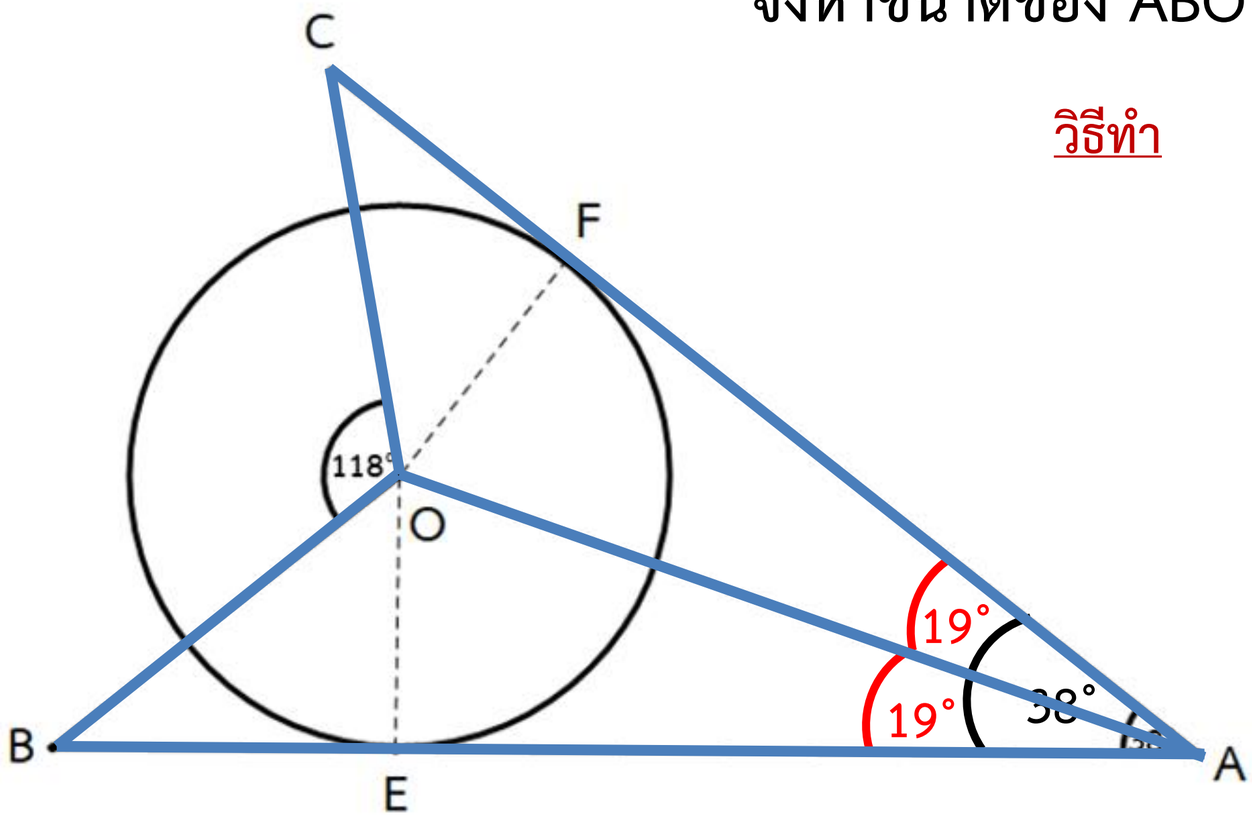
(เท่ากันทุกประการแบบ ด.ด.ด.)

จะได้ $E\hat{A}O = F\hat{A}O = 19°$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ จุด F ตามลำดับ AB = AC , $B\hat{A}C = 38°$ และ $B\hat{O}C = 118°$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}O$ และขนาดของ $A\hat{C}O$



วิธีทำ เนื่องจาก AO = AO (ด้านร่วม)

และ AB = AC (กำหนดให้)

ดังนั้น $\triangle AOB \cong \triangle AOC$

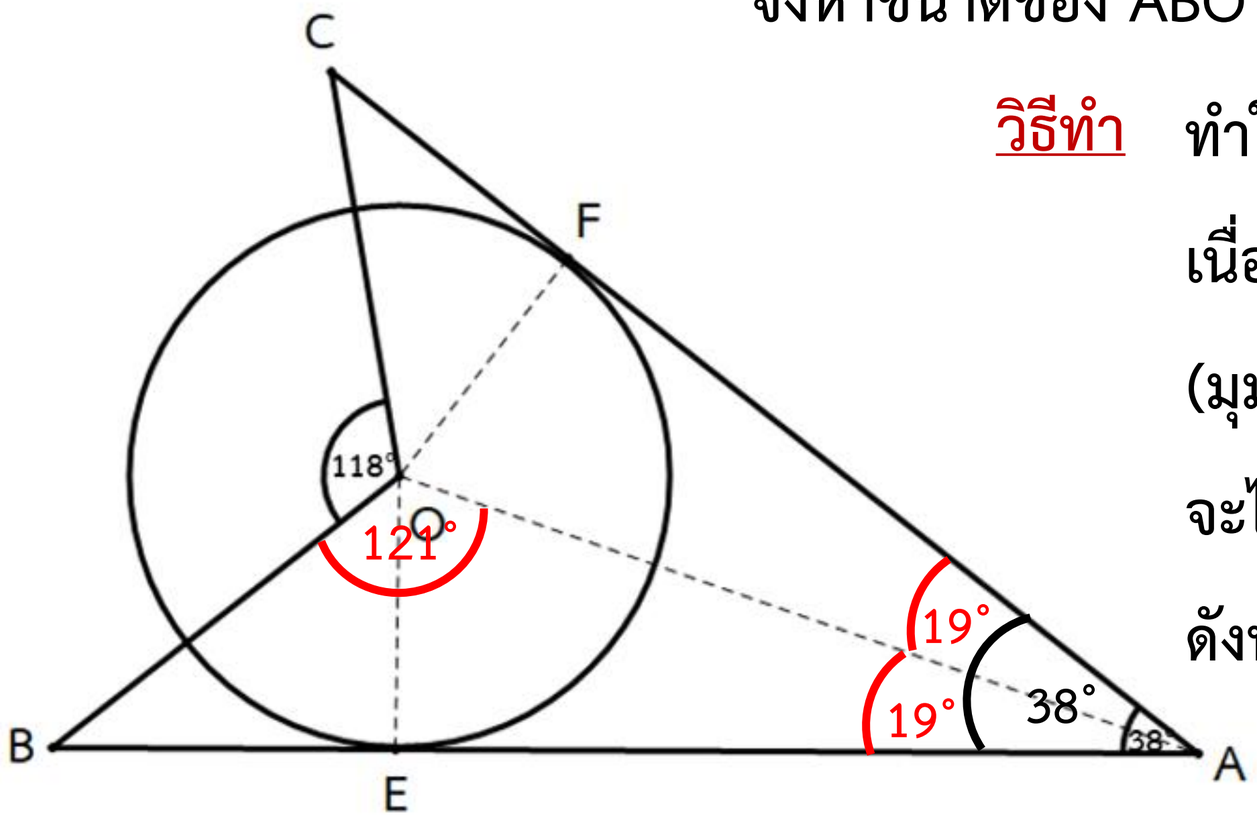
(เท่ากันทุกประการแบบ ด.ม.ด.)

ทำให้ $A\hat{O}B = A\hat{O}C$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ จุด F ตามลำดับ AB = AC , $B\hat{A}C = 38^\circ$ และ $B\hat{O}C = 118^\circ$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}O$ และขนาดของ $A\hat{C}O$



<u>วิธีทำ</u> ทำให้ $A\hat{O}B = A\hat{O}C$

เนื่องจาก $A\hat{O}B + A\hat{O}C + B\hat{O}C = 360^\circ$

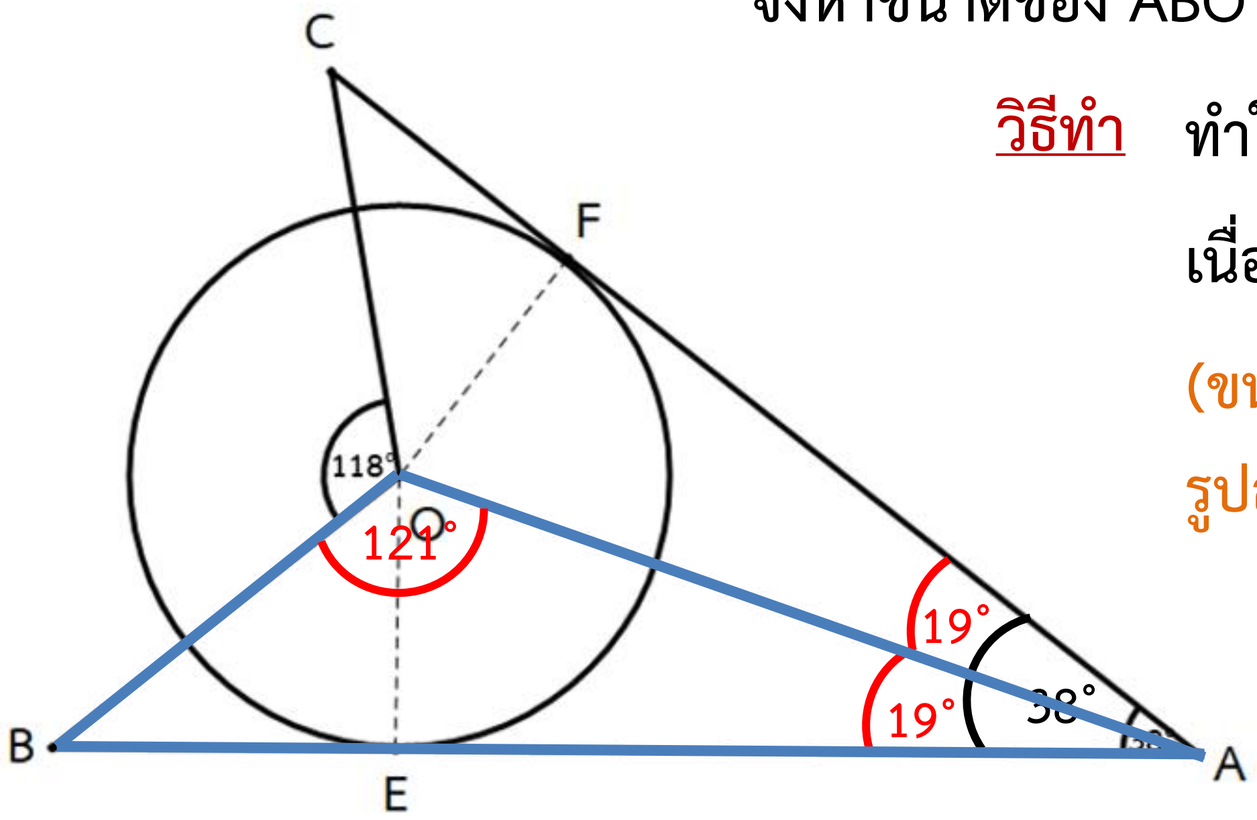
(มุมรอบจุดมีขนาด 360°)

จะได้ $2(A\hat{O}B) + 118 = 360$

ดังนั้น $A\hat{O}B = 121^\circ$

ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ จุด F ตามลำดับ AB = AC , $B\hat{A}C = 38^\circ$ และ $B\hat{O}C = 118^\circ$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}O$ และขนาดของ $A\hat{C}O$



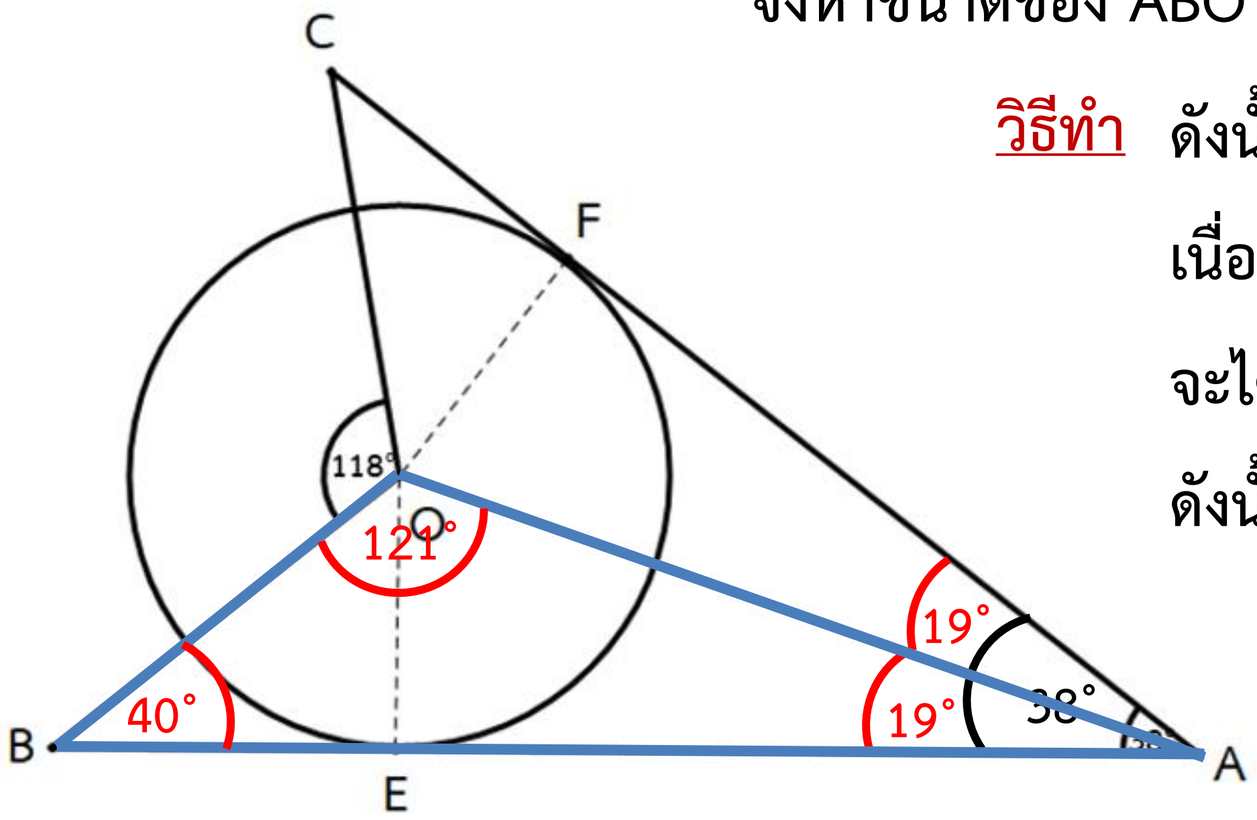
วิธีทำ ทำให้ $A\hat{O}B = A\hat{O}C$

เนื่องจาก $A\hat{B}O + A\hat{O}B + B\hat{A}O = 180^\circ$

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น180°)

ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ จุด F ตามลำดับ AB = AC , $B\hat{A}C = 38°$ และ $B\hat{O}C = 118°$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}O$ และขนาดของ $A\hat{C}O$



วิธีทำ ดังนั้น $A\hat{O}B = 121°$

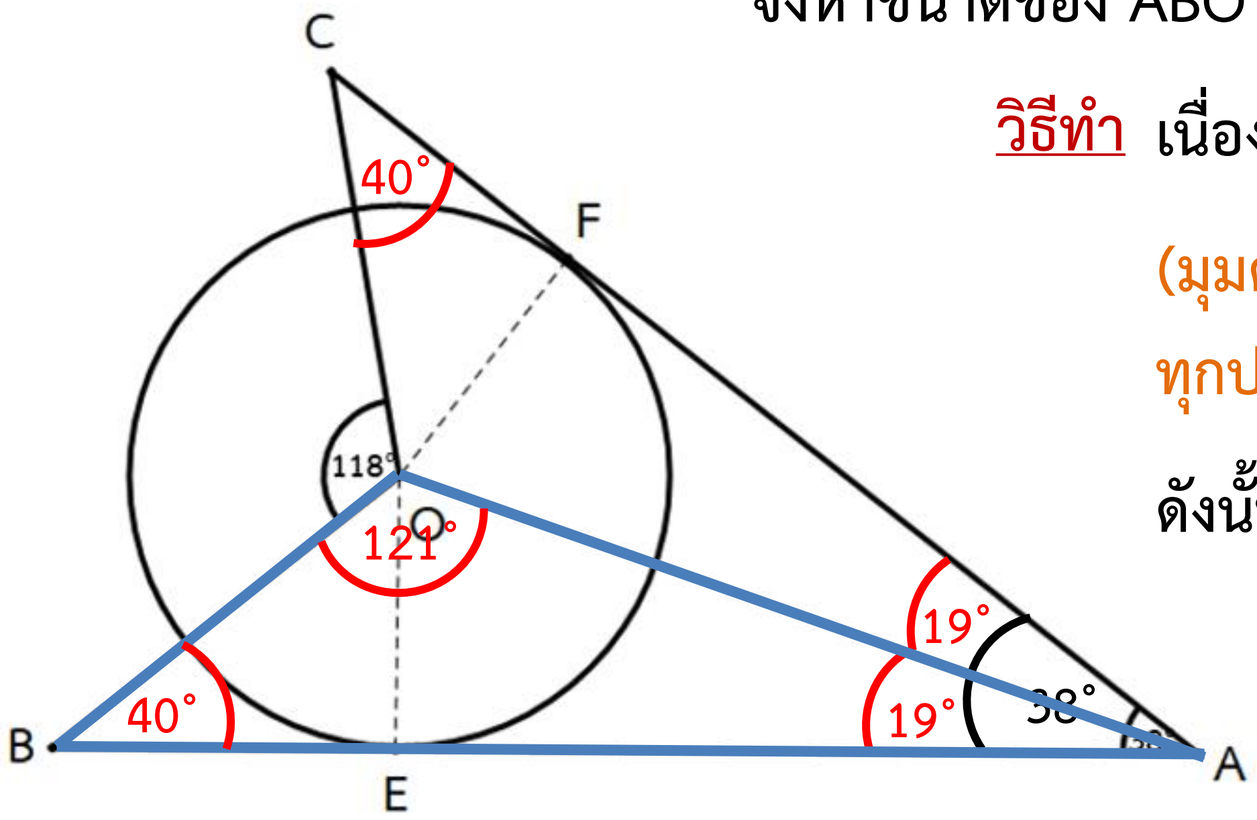
เนื่องจาก $A\hat{B}O + A\hat{O}B + B\hat{A}O = 180°$

จะได้ $A\hat{B}O + 121 + 19 = 180$

ดังนั้น $A\hat{B}O = 40°$

ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ จุด F ตามลำดับ AB = AC , $B\hat{A}C = 38°$ และ $B\hat{O}C = 118°$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}O$ และขนาดของ $A\hat{C}O$



<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $A\hat{B}O = A\hat{C}O$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $A\hat{C}O = 40°$ (สมบัติของการเท่ากัน)

แบบฝึกหัด 9

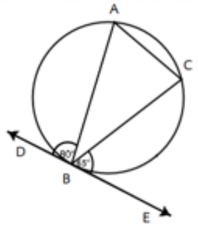
ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

เส้นสัมผัสวงกลม (2)

แบบฝึกหัด 9 : เส้นสัมผัสวงกลม (2)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงแนวคิดในการหาคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จากรูป $\overleftrightarrow{DE}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B $C\hat{B}E = 65°$ และ $A\hat{B}D = 80°$ จงหาขนาดของ $B\hat{A}C$ และ $A\hat{C}B$



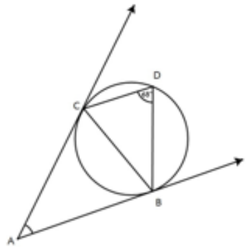
วิธีทำ เนื่องจาก $C\hat{B}E =$ _____ = ___ (_____

และ $D\hat{B}C =$ _____ = ___ _____)

ดังนั้น $B\hat{A}C =$ _____

และ $A\hat{C}B =$ _____

2. จากรูป $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลมที่จุด B และจุด C ตามลำดับ และ $B\hat{D}C = 68°$ จงหาขนาดของ $B\hat{A}C$



วิธีทำ เนื่องจาก $A\hat{B}C =$ _____ = _____ (_____

และ $A\hat{C}B =$ _____ = _____ _____)

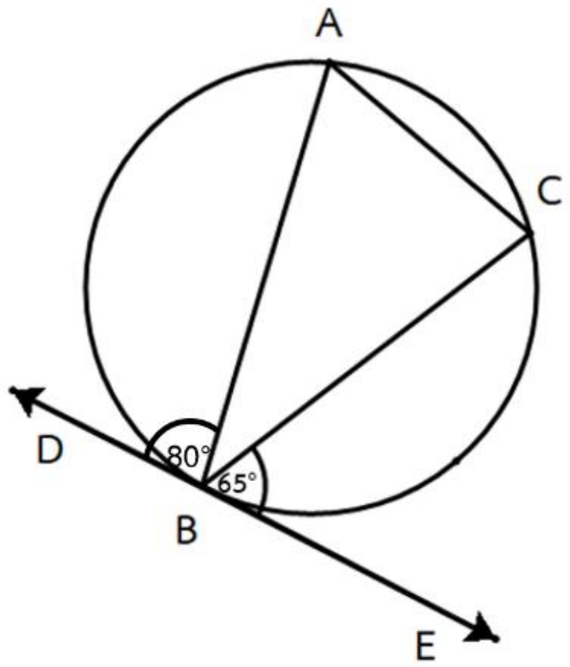
เนื่องจาก _____ = 180° (_____)

จะได้ _____ = 180°

ดังนั้น $B\hat{A}C =$ _____

แบบฝึกหัด 9 : เส้นสัมผัสของวงกลม (2)

ข้อที่ 1 จากรูป $\overleftrightarrow{DE}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B $C\hat{B}E = 65°$ และ $A\hat{B}D = 80°$ จงหาขนาดของ $B\hat{A}C$ และ $A\hat{C}B$



เนื่องจาก $C\hat{B}E$ = _____ = ___ } (_____

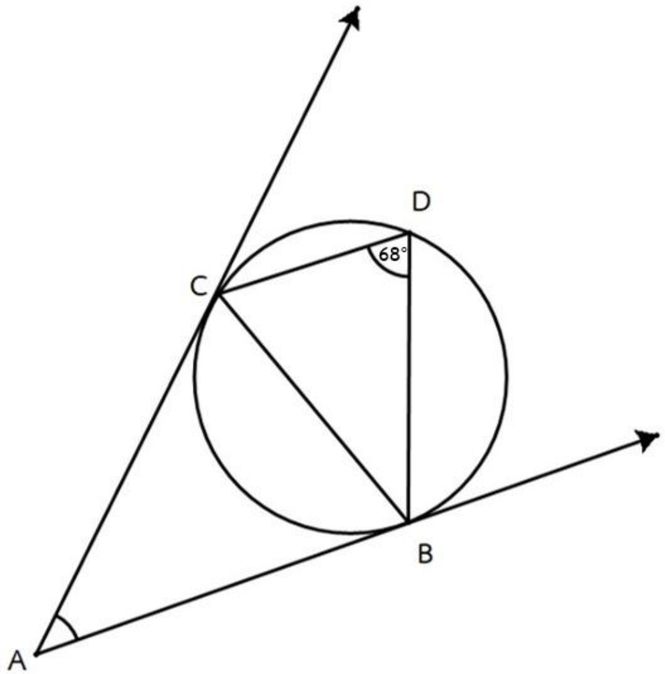
และ $D\hat{B}A$ = _____ = ___ } _____)

ดังนั้น $B\hat{A}C$ = _____

และ $A\hat{C}B$ = _____

แบบฝึกหัด 9 : เส้นสัมผัสของวงกลม (2)

ข้อที่ 2 จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{AC}$ สัมผัสวงกลมที่จุด B และจุด C ตามลำดับ และ $B\hat{D}C = 68^\circ$ จงหาขนาดของ $B\hat{A}C$



เนื่องจาก $A\hat{B}C$ = _____ = _____ } (_____

และ $A\hat{C}B$ = _____ = _____ } _____)

เนื่องจาก _____ = 180° (_____)

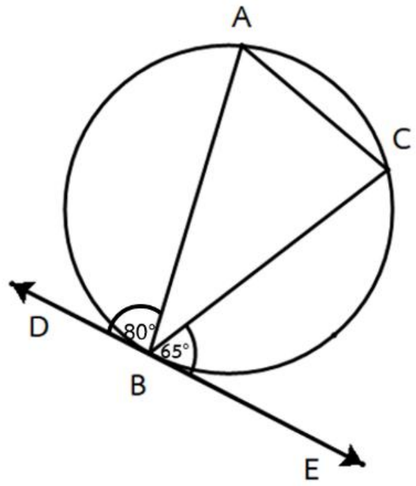
จะได้ _____ = 180°

ดังนั้น $B\hat{A}C$ = _____

เฉลย...
แบบฝึกหัด

ข้อที่ 1

จากรูป $\overleftrightarrow{DE}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B $C\hat{B}E = 65°$ และ $A\hat{B}D = 80°$ จงหาขนาดของ $B\hat{A}C$ และ $A\hat{C}B$



วิธีทำ เนื่องจาก $C\hat{B}E = B\hat{A}C = 65°$

และ $D\hat{B}A = A\hat{C}B = 80°$

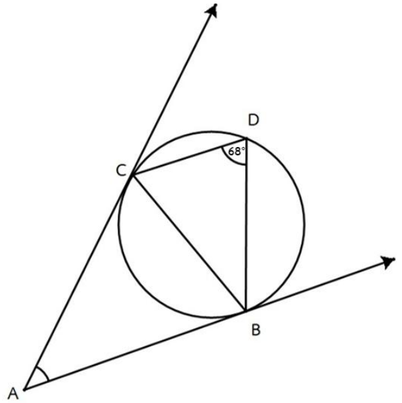
} (มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

ดังนั้น $B\hat{A}C = 65°$

และ $A\hat{C}B = 80°$

ข้อที่ 2

จากรูป $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ สัมผัสวงกลมที่จุด B และจุด C ตามลำดับ และ $B\hat{D}C = 68°$ จงหาขนาดของ $B\hat{A}C$



วิธีทำ เนื่องจาก $A\hat{B}C = B\hat{D}C = 68°$

และ $A\hat{C}B = B\hat{D}C = 68°$

(มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

เนื่องจาก $A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C = 180°$

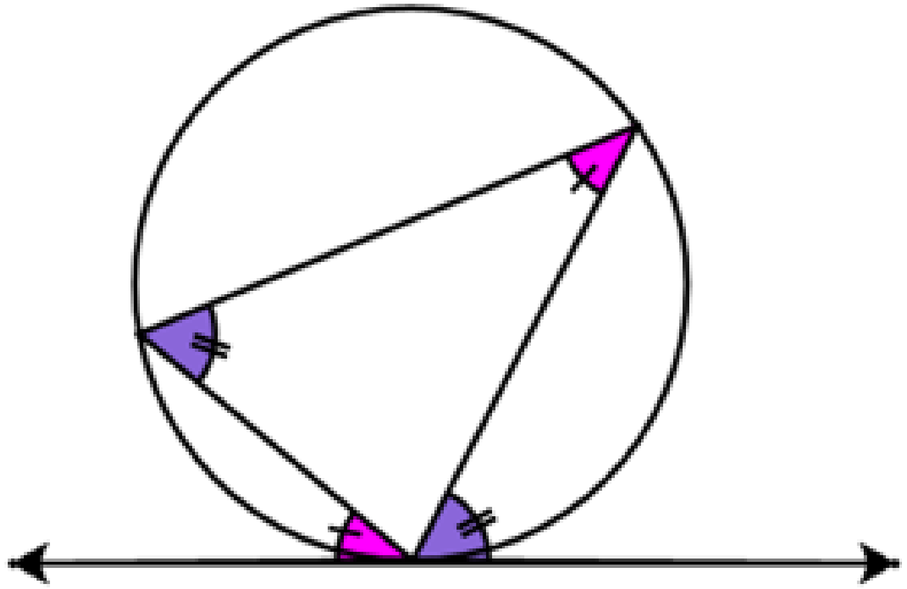
(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°)

จะได้ $68 + 68 + B\hat{A}C = 180°$

ดังนั้น $B\hat{A}C = 44°$

สรุปบทเรียน

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและคอร์ดของวงกลม



มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม
ที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของ
มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

เราสามารถนำความรู้นี้ไปใช้ร่วมกับทฤษฎีบท
หรือสมบัติของวงกลมอื่น ๆ รวมทั้งทฤษฎีบทพีทาโกรัส
ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้

บทเรียนครั้งต่อไป

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

จานกระเบื้องโบราณ

สิ่งที่ต้องเตรียม

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 6 :
จานกระเบื้องโบราณ