

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค23102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
หน่วยที่ 2 วงกลม

เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม (1)

ครูผู้สอน ครูสรวิรัตน์ เดชะชาติ



เล่นล้มพับสงกลม (1)

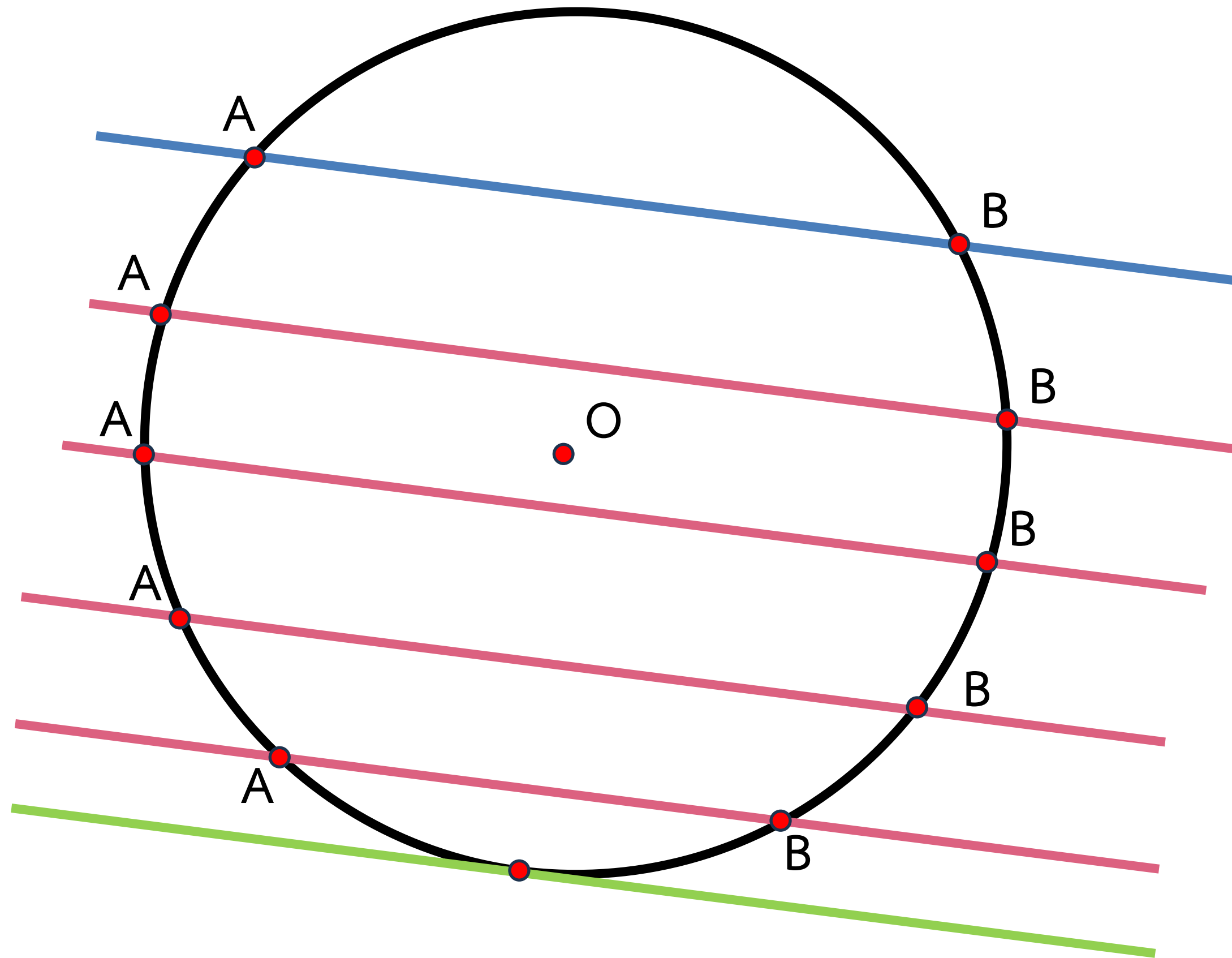


จุดประสงค์การเรียนรู้



นักเรียนสามารถหาขนาด
ของมุมโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ
เส้นสัมผัสวงกลม



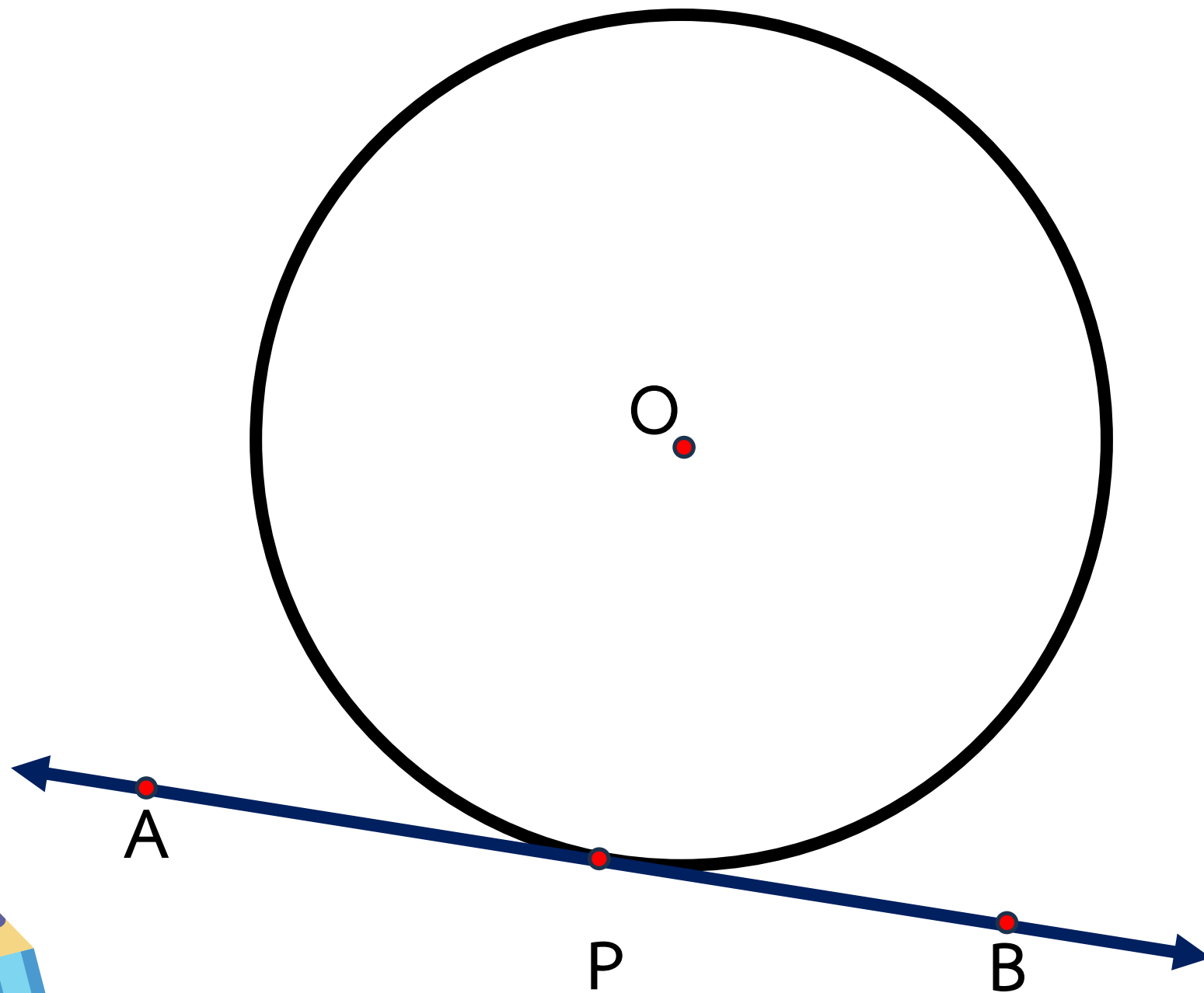




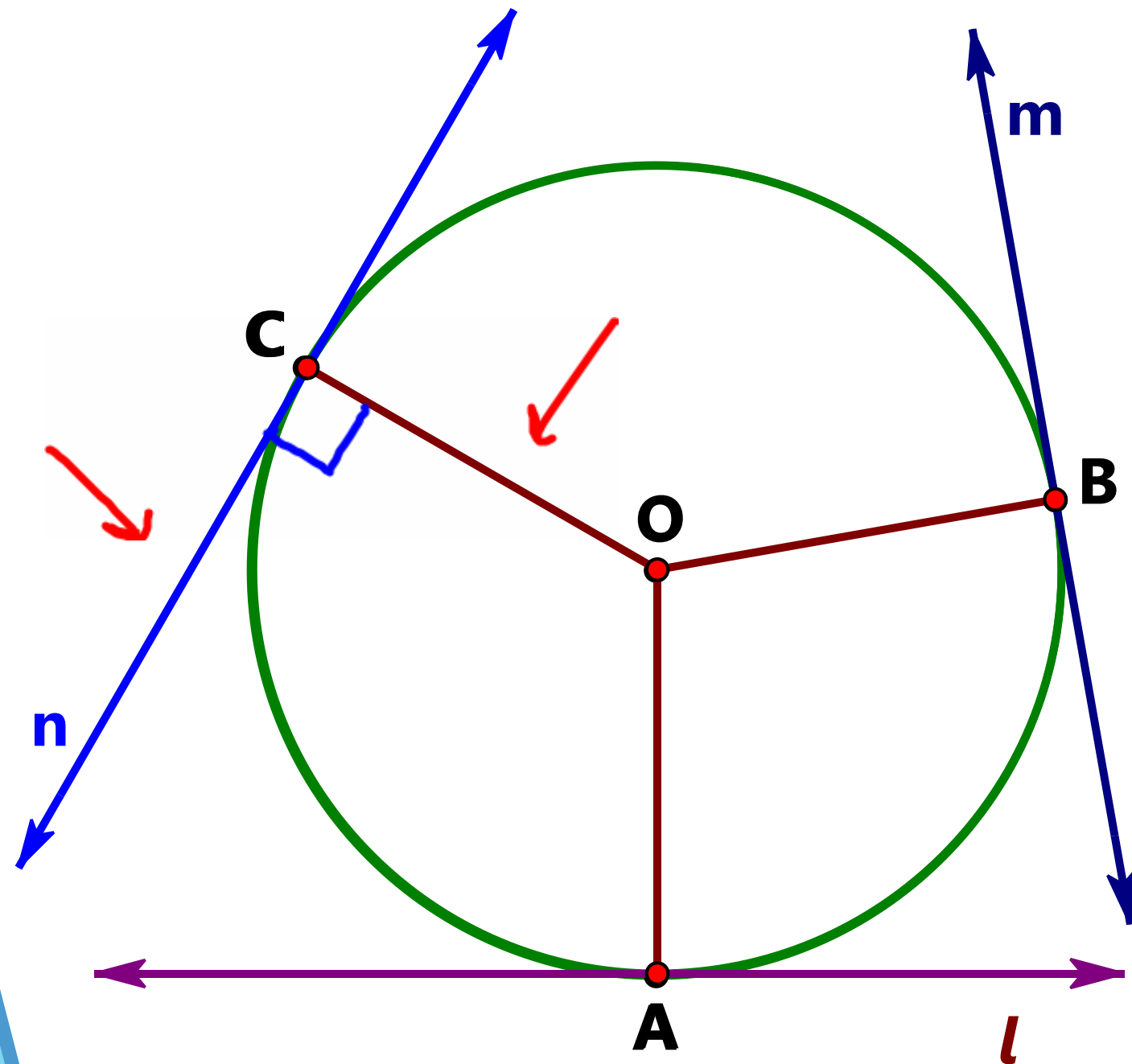
เส้นสัมผัสวงกลม

เส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น
และเรียกจุดตัดนั้นว่า **จุดสัมผัส**

เส้นสัมผัสวงกลม อาจเป็นส่วนหนึ่งส่วนใด
ของ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่ผ่านจุด P ก็ได้
เช่น $\overline{AB}$, $\overrightarrow{PA}$ หรือ $\overrightarrow{PB}$



สำรวจความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสัมผัสกับรัศมี



เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส

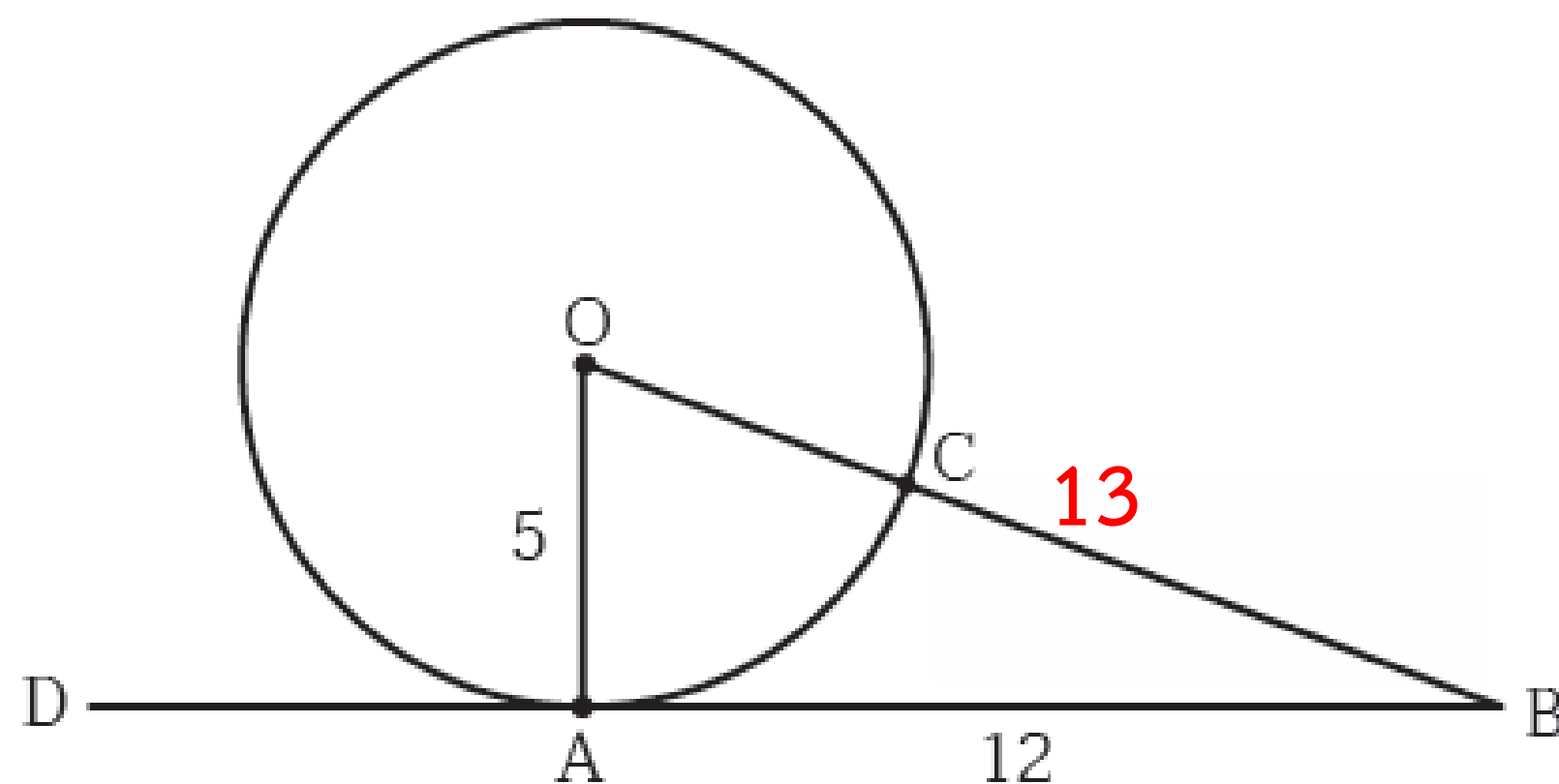
รัศมีของวงกลมและเส้นสัมผัสวงกลม
จะตั้งฉากซึ่งกันและกันที่จุดสัมผัส





ตัวอย่างที่ 1

จากรูป ให้ $\overline{BD}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด A รัศมี OA ยาว 5 เซนติเมตร
และ $\overline{AB}$ ยาว 12 เซนติเมตร จงหาความยาวของ $\overline{BC}$



วิธีทำ

จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัส
จึงได้ว่า $\angle OAB$ เป็นมุมฉาก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } OB^2 &= OA^2 + AB^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 169 \end{aligned}$$

ดังนั้น $OB = 13$





ตัวอย่างที่ 1

จากรูป ให้ $\overline{BD}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด A รัศมี OA ยาว 5 เซนติเมตร
และ $\overline{AB}$ ยาว 12 เซนติเมตร จงหาความยาวของ $\overline{BC}$

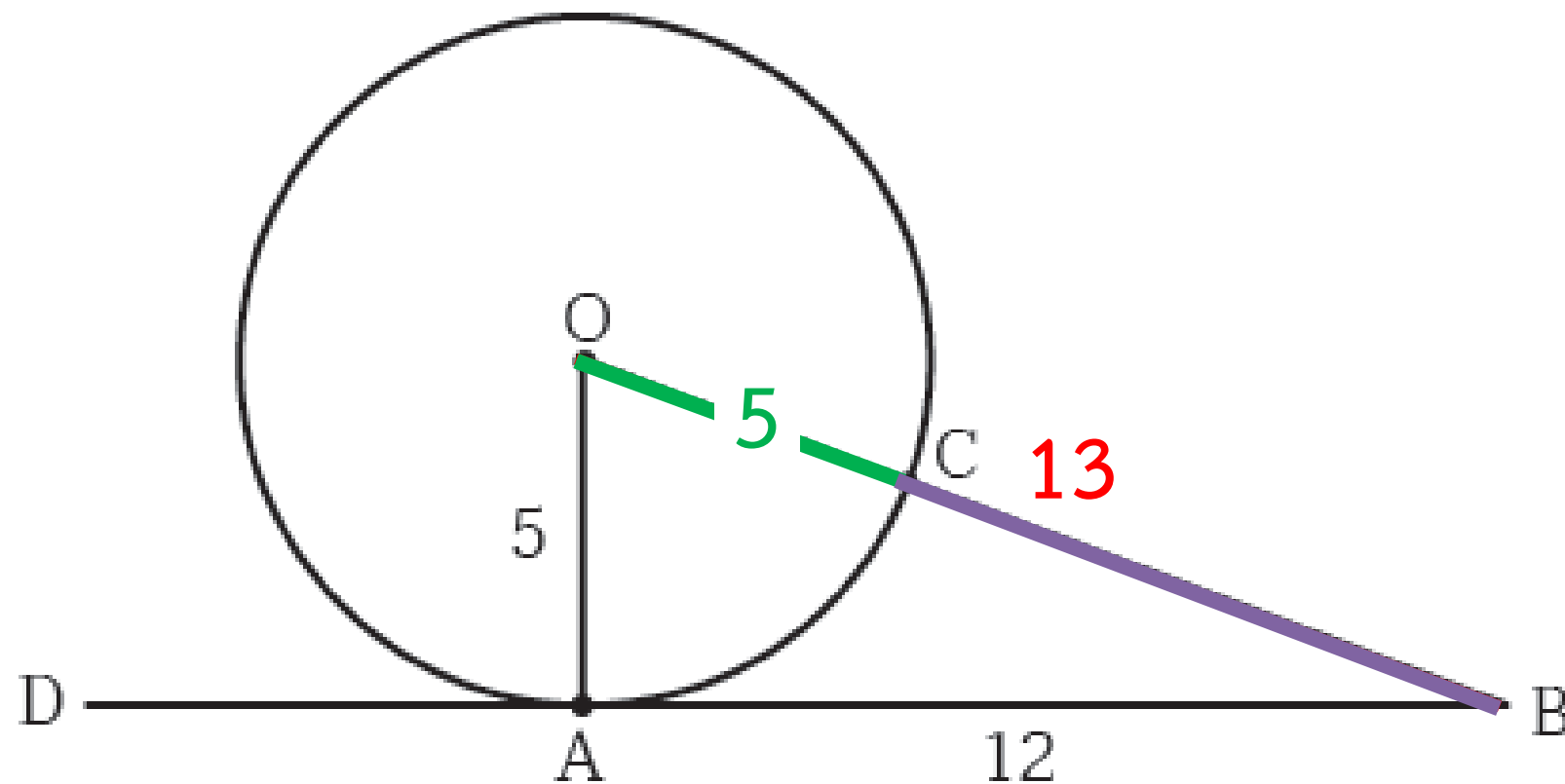
วิธีทำ ดังนั้น $OB = 13$

เนื่องจาก $BC = OB - OC$

$$BC = 13 - 5$$

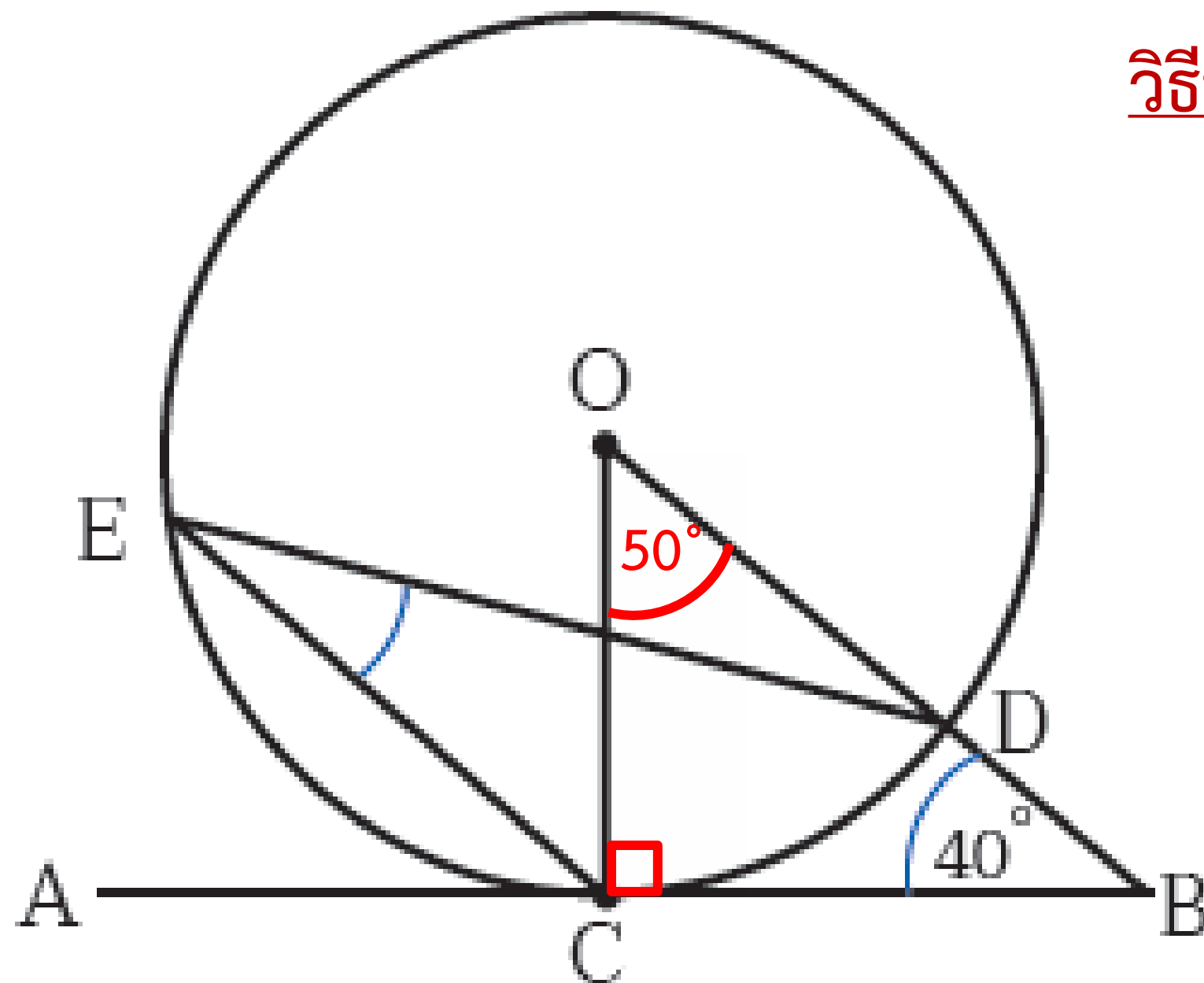
$$= 8$$

ดังนั้น $\overline{BC}$ ยาว 8 เซนติเมตร



ตัวอย่างที่ 2

จากรูป ให้ $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด C และ $\angle O\hat{B}C = 40^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle C\hat{E}D$



วิธีทำ เนื่องจาก $\angle O\hat{B}C = 40^\circ$
และจากทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัส
จะได้ว่า $\angle O\hat{C}B = 90^\circ$

พิจารณา $\triangle OCB$

จะได้ $\angle C\hat{O}B + \angle O\hat{B}C + \angle O\hat{C}B = 180^\circ$

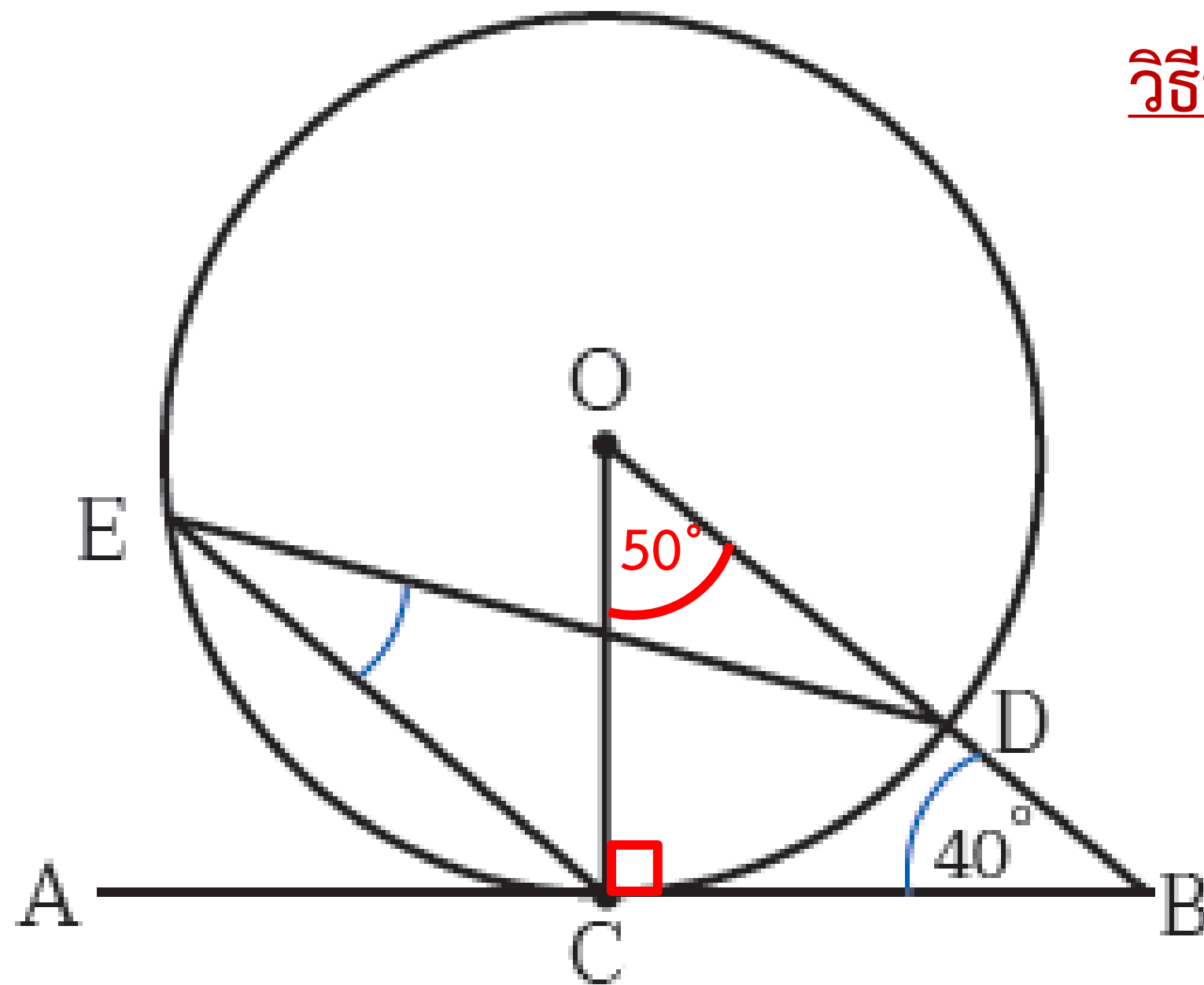
$$\angle C\hat{O}B + 40 + 90 = 180$$

$$\angle C\hat{O}B = 50^\circ$$



ตัวอย่างที่ 2

จากรูป ให้ $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด C และ $\angle OBC = 40^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle CED$



วิธีทำ $\angle COB = 50^\circ$

เนื่องจาก $\angle CED$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม

และ $\angle COB$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง

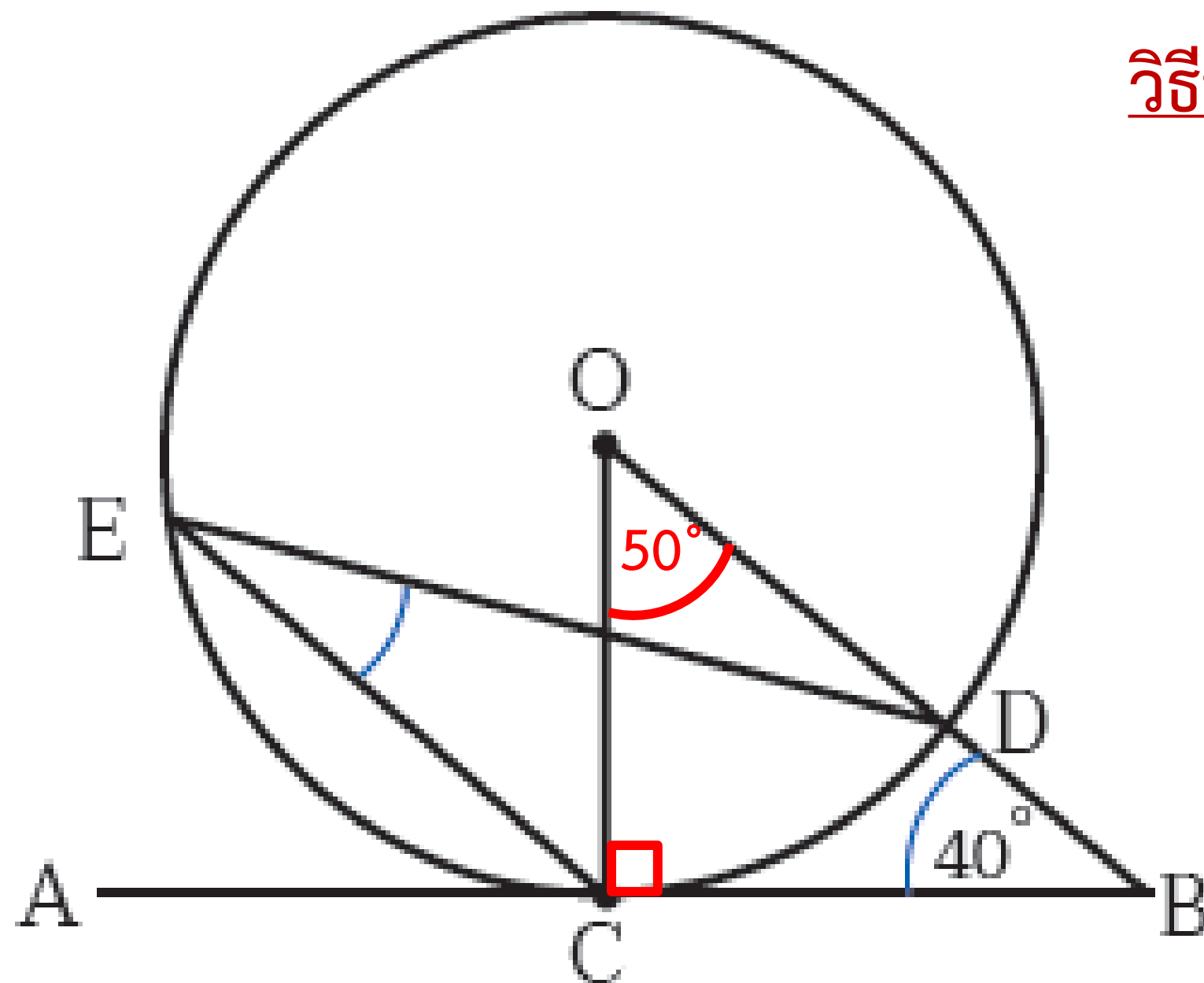
ซึ่งต่างรองรับด้วยส่วนโค้ง CD

จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมและมุมที่จุดศูนย์กลาง



ตัวอย่างที่ 2

จากรูป ให้ $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด C และ $\angle OBC = 40^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle CED$



วิธีทำ จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมและมุมที่จุดศูนย์กลางกลาง

$$\text{จึงได้ว่า } \angle COB = 2(\angle CED)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \angle CED &= \frac{1}{2} \angle COB \\ &= \frac{1}{2} \times 50\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \angle CED = 25^\circ$$



ใบกิจกรรม 4

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

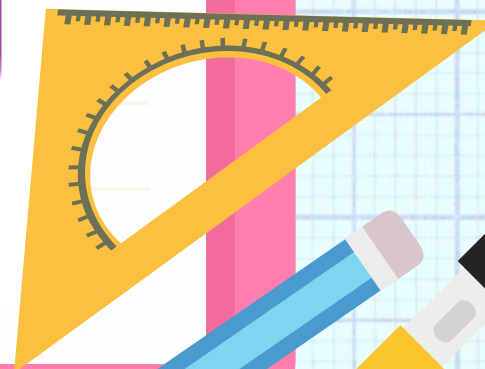
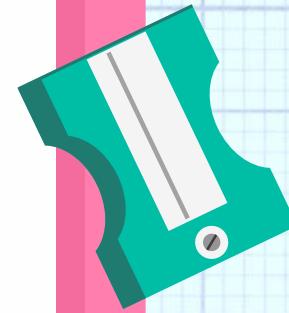
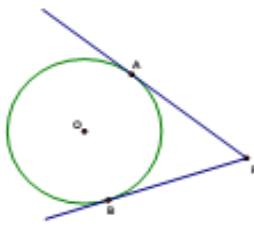
สำรวจเส้นสัมผัส



ใบกิจกรรม 4 : สำรวจเส้นสัมผัส
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตอนที่ 1 : สร้างวงกลมโดยมีจุด P ที่อยู่นอกวงกลม แล้วสร้างส่วนของเส้นตรง จากจุด P มาสัมผัสวงกลมที่จุด A และจุด B ดังรูปตัวอย่างต่อไปนี้

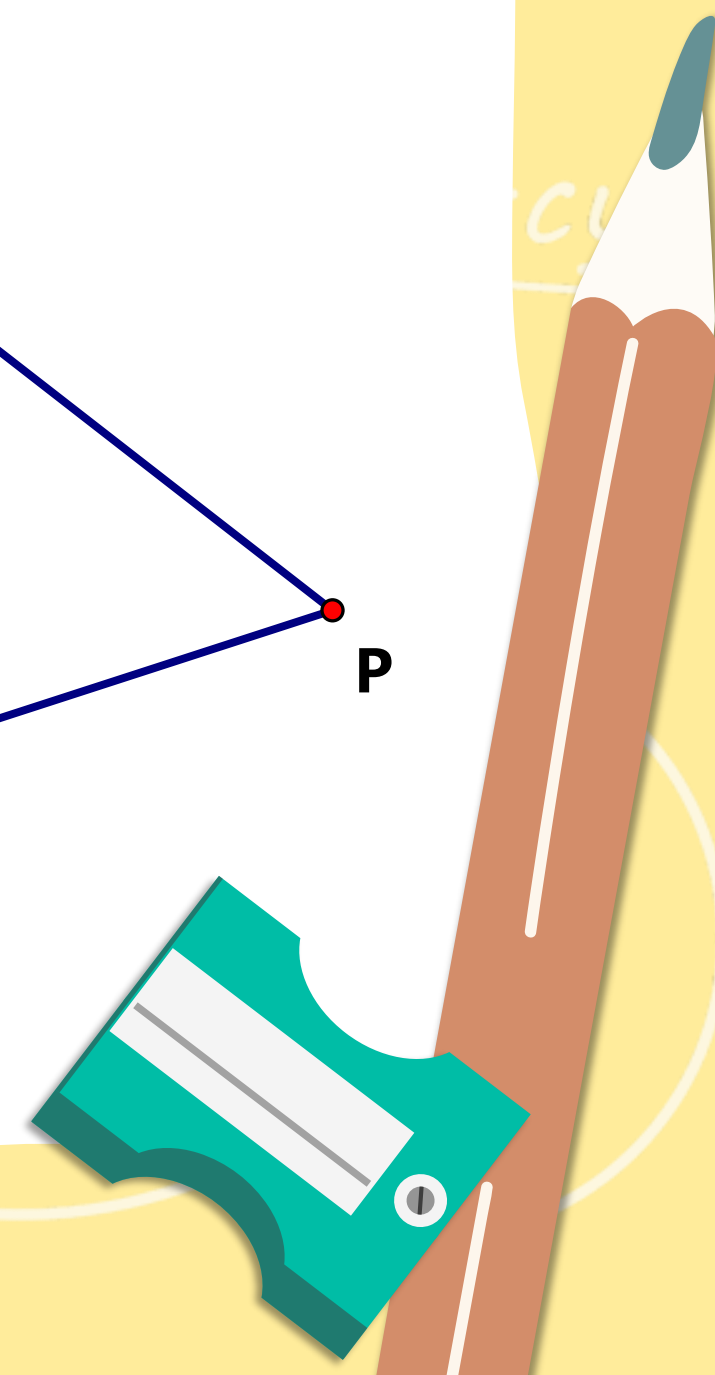
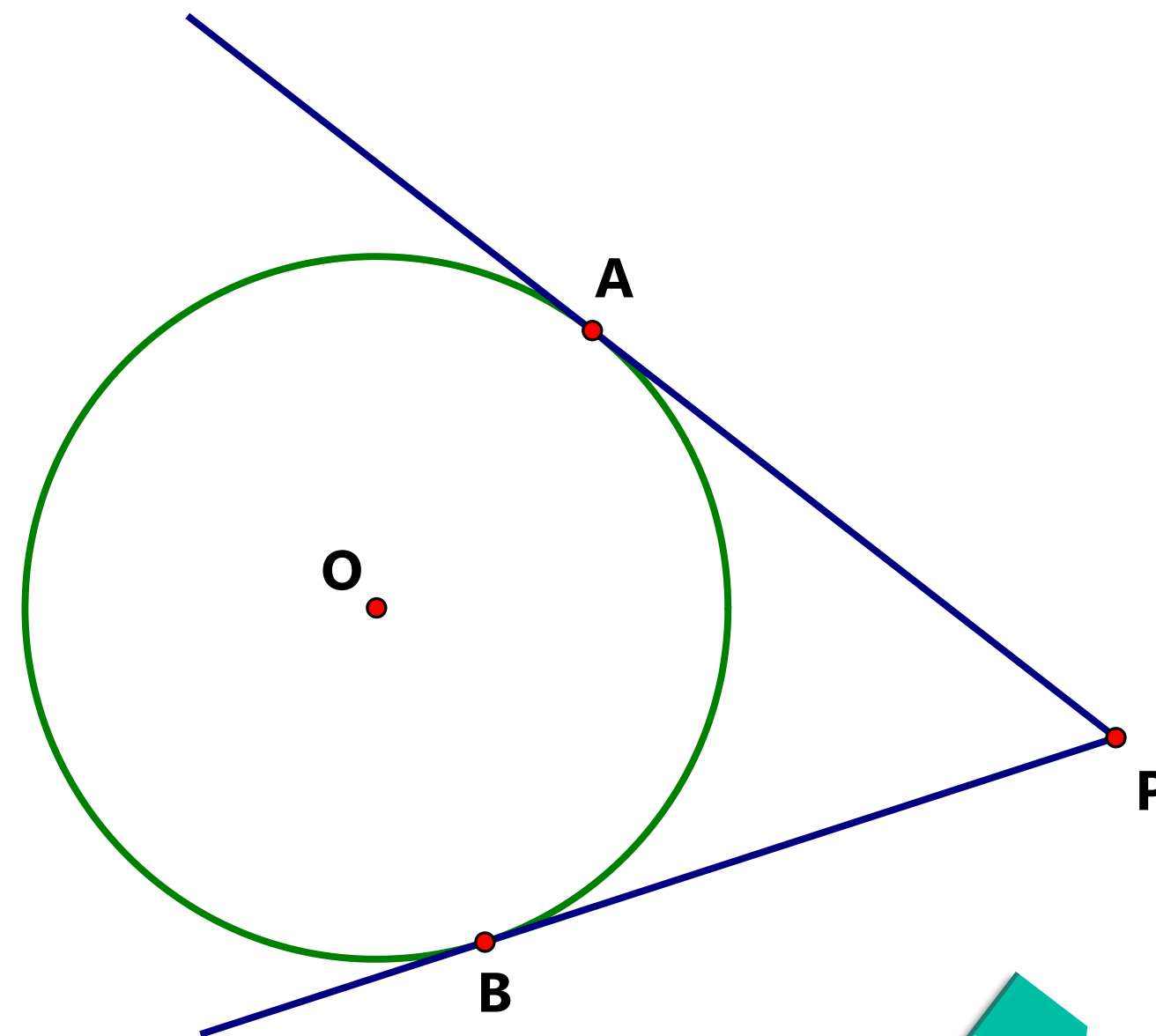
รูปตัวอย่าง



สำรวจเส้นสัมผัส

ขั้นตอนที่ 1

ให้สมาชิกแต่ละคนสร้างวงกลมคนละวง
ที่มีขนาดแตกต่างกัน โดยที่แต่ละวงจะมีจุด P
ที่อยู่ภายนอกวงกลม และจุด P ของวงกลม
แต่ละวงอยู่ห่างจากวงกลมนั้น ๆ ไม่เท่ากัน
แล้วสร้างส่วนของเส้นตรง จากจุด P
มาสัมผัสวงกลมที่จุด A และจุด B
ดังรูปตัวอย่างต่อไปนี้



สำรวจเส้นสัมผัส

ขั้นตอนที่ 2

ให้นักเรียนวัดความยาวของ $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ แล้วบันทึกผลการวัดของสมาชิกในกลุ่มลงในใบกิจกรรม

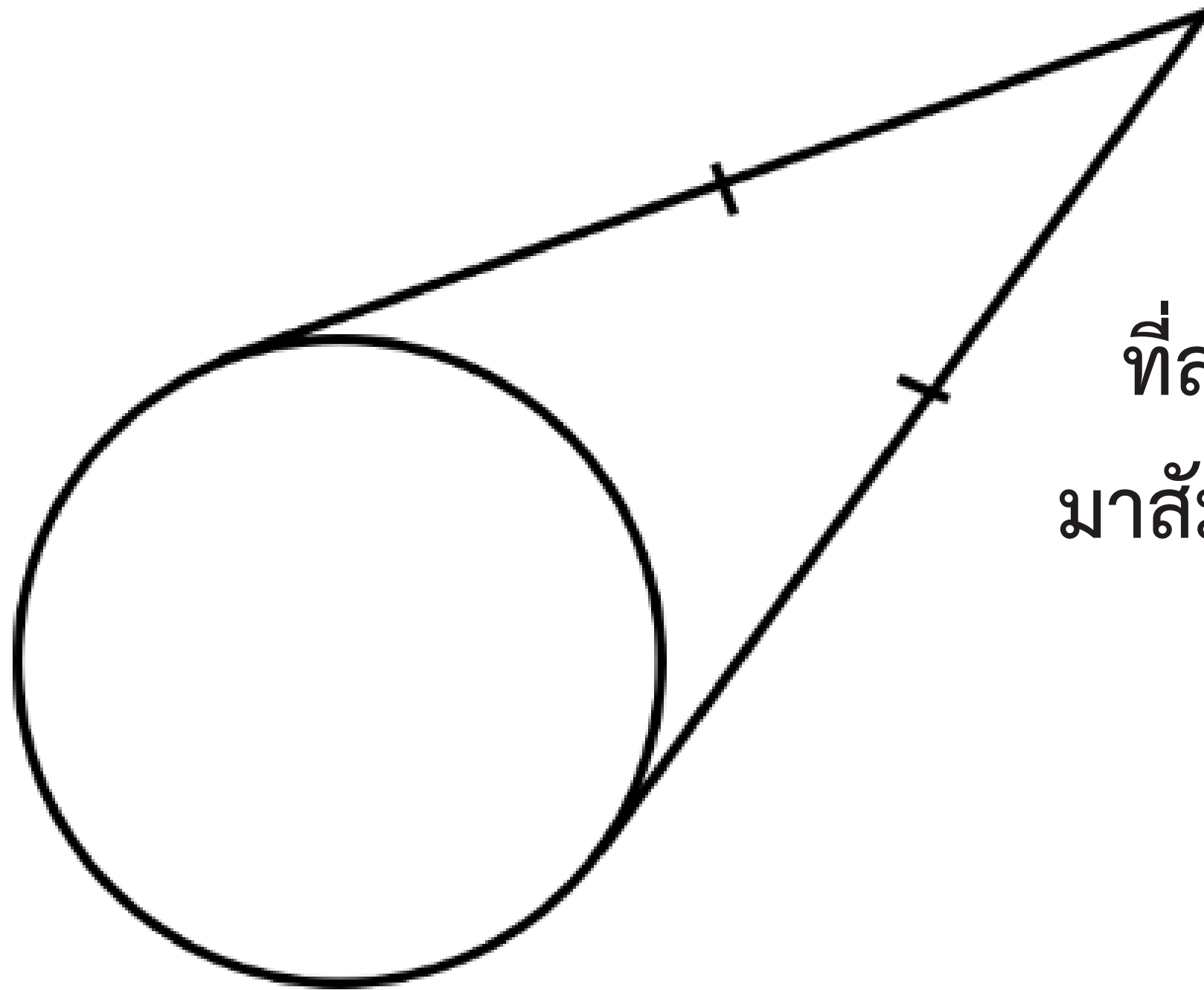
ชื่อสมาชิก	ความยาวของ $\overline{PA}$ (ซม.)	ความยาวของ $\overline{PB}$ (ซม.)
คิว	3.5	3.5
แก้ว	6.6	6.6
อู๋ม	5	5
มิว	7.5	7.5
ยูฟ่า	4.9	4.9

ขั้นตอนที่ 3

ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับความยาวของ $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ ของวงกลม



สำรวจเส้นสัมผัส



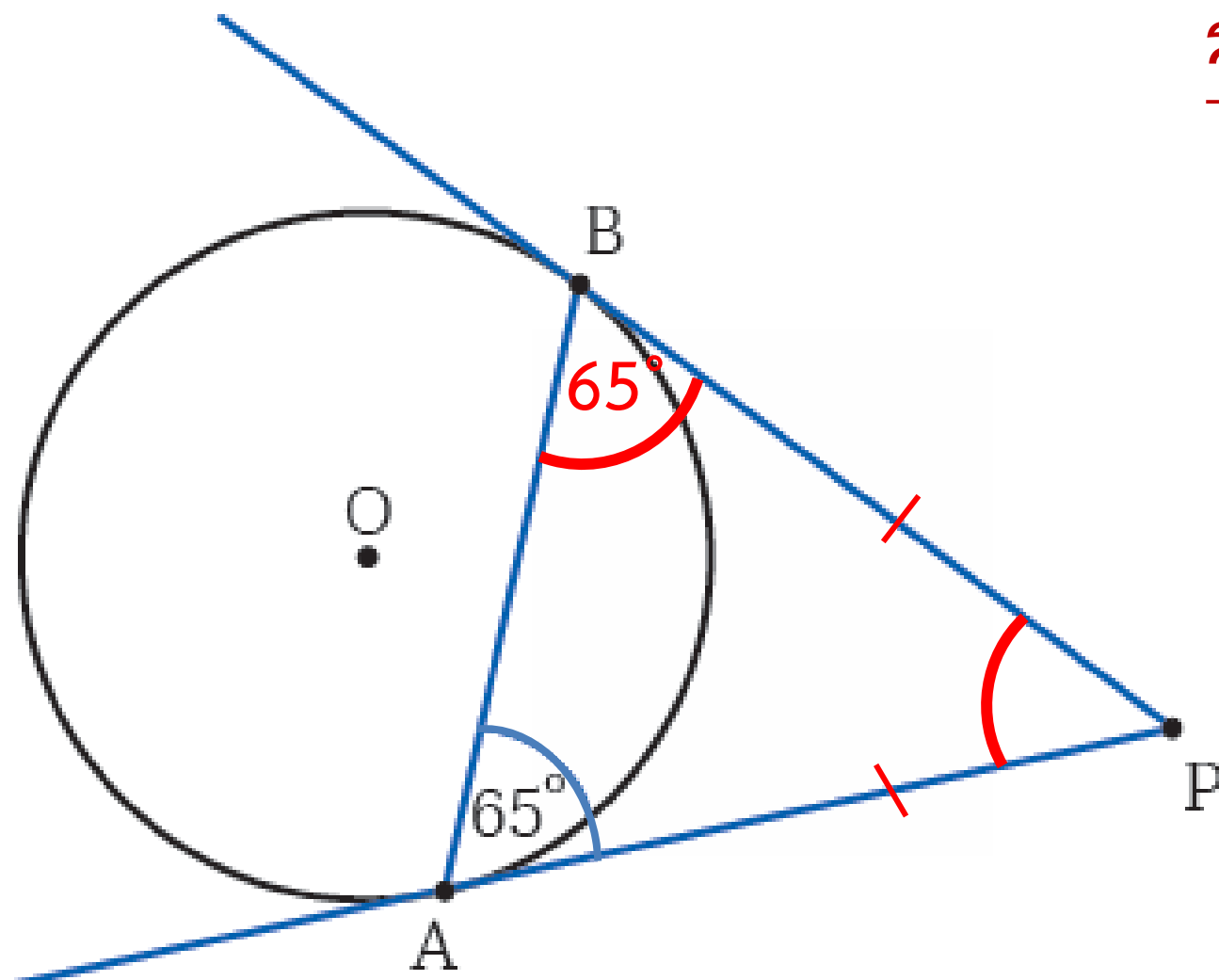
ส่วนของเส้นตรงสองเส้น
ที่ลากจากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลม
มาสัมผัสวงกลมวงเดียวกันจะยาวเท่ากัน





ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด A และจุด B
และมี $\angle PAB = 65^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle PBA$



วิธีทำ เนื่องจาก $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัส

จึงได้ว่า $PA = PB$

ดังนั้น $\triangle ABP$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ว่า $\angle PAB = \angle PBA = 65^\circ$

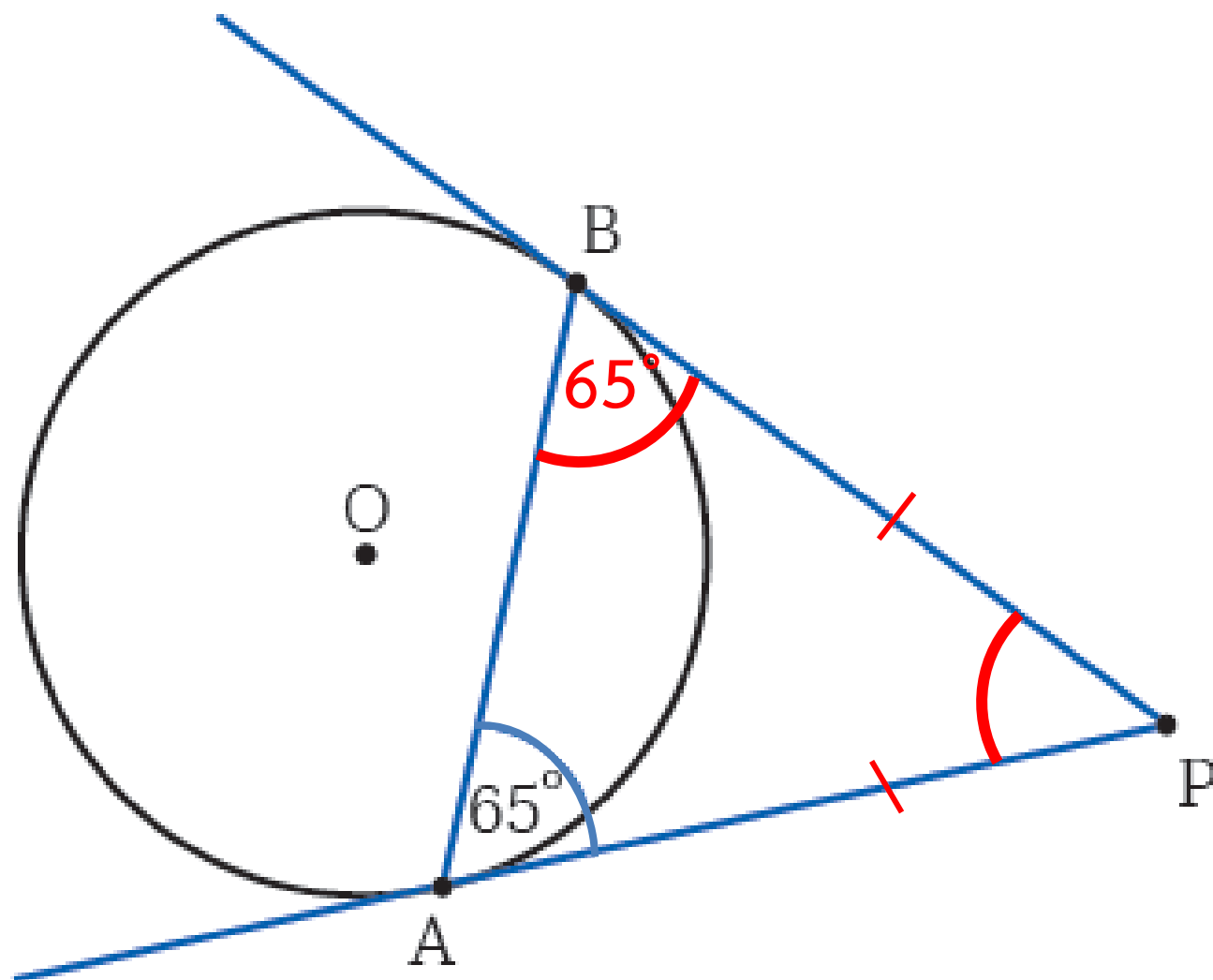
พิจารณา $\triangle ABP$





ตัวอย่างที่ 3

จากรูป $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด A และจุด B
และมี $\angle PAB = 65^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle APB$



พิจารณา $\triangle ABP$

จะได้ว่า $\angle APB + \angle PAB + \angle PBA = 180^\circ$

$$\angle APB + 65 + 65 = 180$$

$$\angle APB + 130 = 180$$

$$\angle APB = 50^\circ$$



แบบฝึกหัด 8

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

เส้นสัมผัสของวงกลม



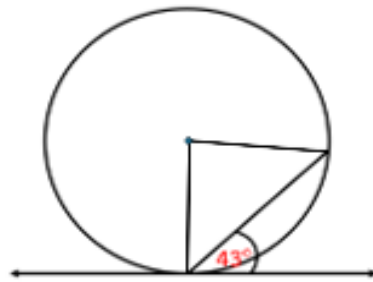
แบบฝึกหัด 8 : เส้นสัมผัสวงกลม (1)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม

รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงแนวคิดในการหาคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จากรูป $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด A และ $\angle BAC = 43^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle AOC$



วิธีทำ เนื่องจาก $\angle OAB =$ _____ (_____)

และ $\angle OAC + \angle CAB =$ _____

จะได้ $\angle OAC +$ _____ = _____

ดังนั้น $\angle OAC =$ _____

เนื่องจาก $OA =$ _____ (_____)

จะได้ $\triangle AOC$ เป็น _____ (_____)

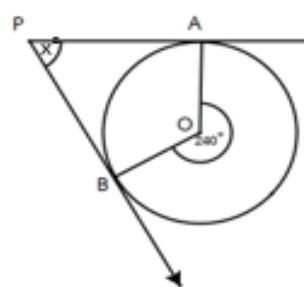
และ $\angle OAC =$ _____ - _____ (_____)

เนื่องจาก _____ = 180° (_____)

จะได้ _____ = 180

ดังนั้น _____

2. จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x เมื่อ A และ B เป็นจุดสัมผัส



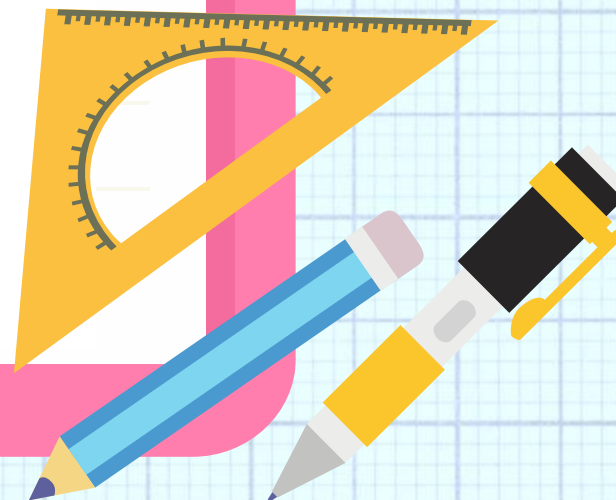
วิธีทำ เนื่องจาก $\angle AOB =$ _____

และเนื่องจากจุด A และจุด B เป็น _____

ทำให้ $\angle OAP =$ _____ - _____

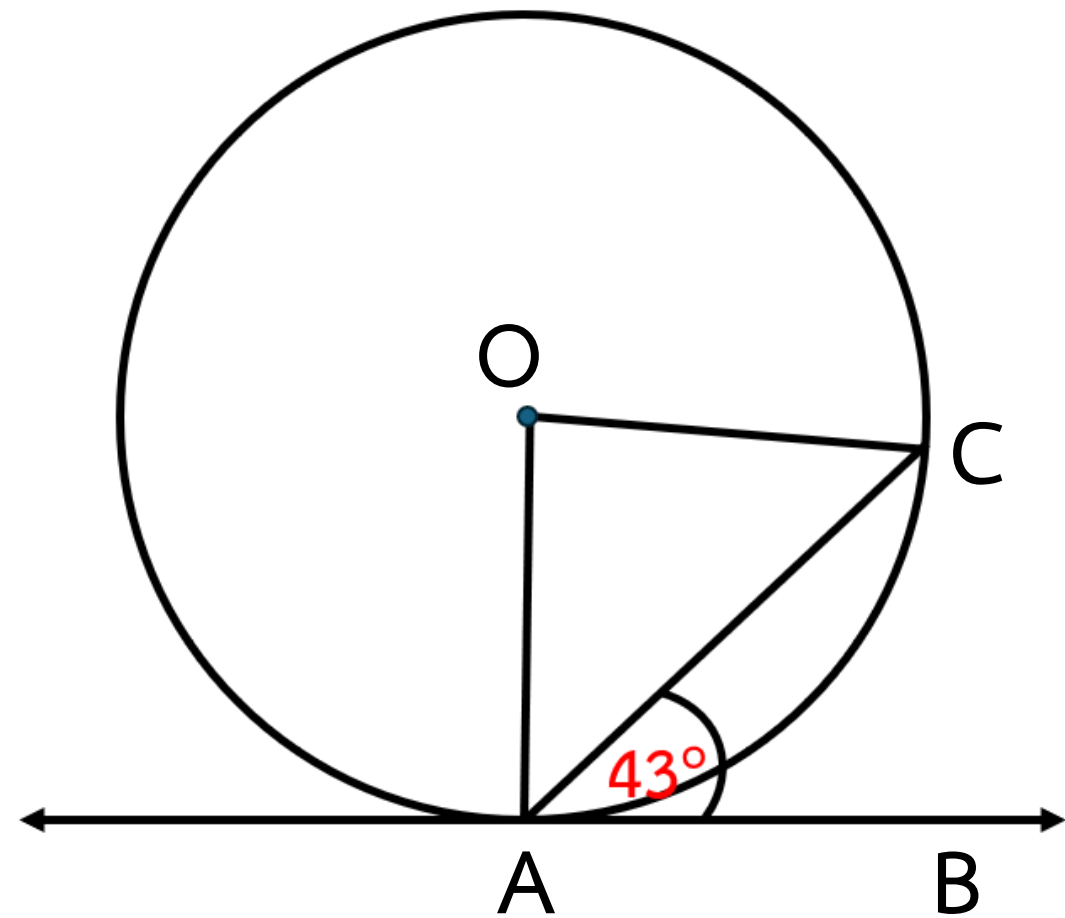
เนื่องจาก _____ = 360°

จะได้ _____ = 360



แบบฝึกหัด 8 : เส้นสัมผัสของวงกลม

ข้อที่ 1 จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด A และ $\angle BAC = 43^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle AOC$



เนื่องจาก $\angle OAB = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\hspace{2cm}$)

และ $\angle OAC + \angle CAB = \underline{\hspace{2cm}}$

จะได้ $\angle OAC + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

ดังนั้น $\angle OAC = \underline{\hspace{2cm}}$

เนื่องจาก $OA = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\hspace{2cm}$)

จะได้ $\triangle AOC$ เป็น $\underline{\hspace{2cm}}$ ($\hspace{2cm}$)

และ $\angle OAC = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\hspace{2cm}$)

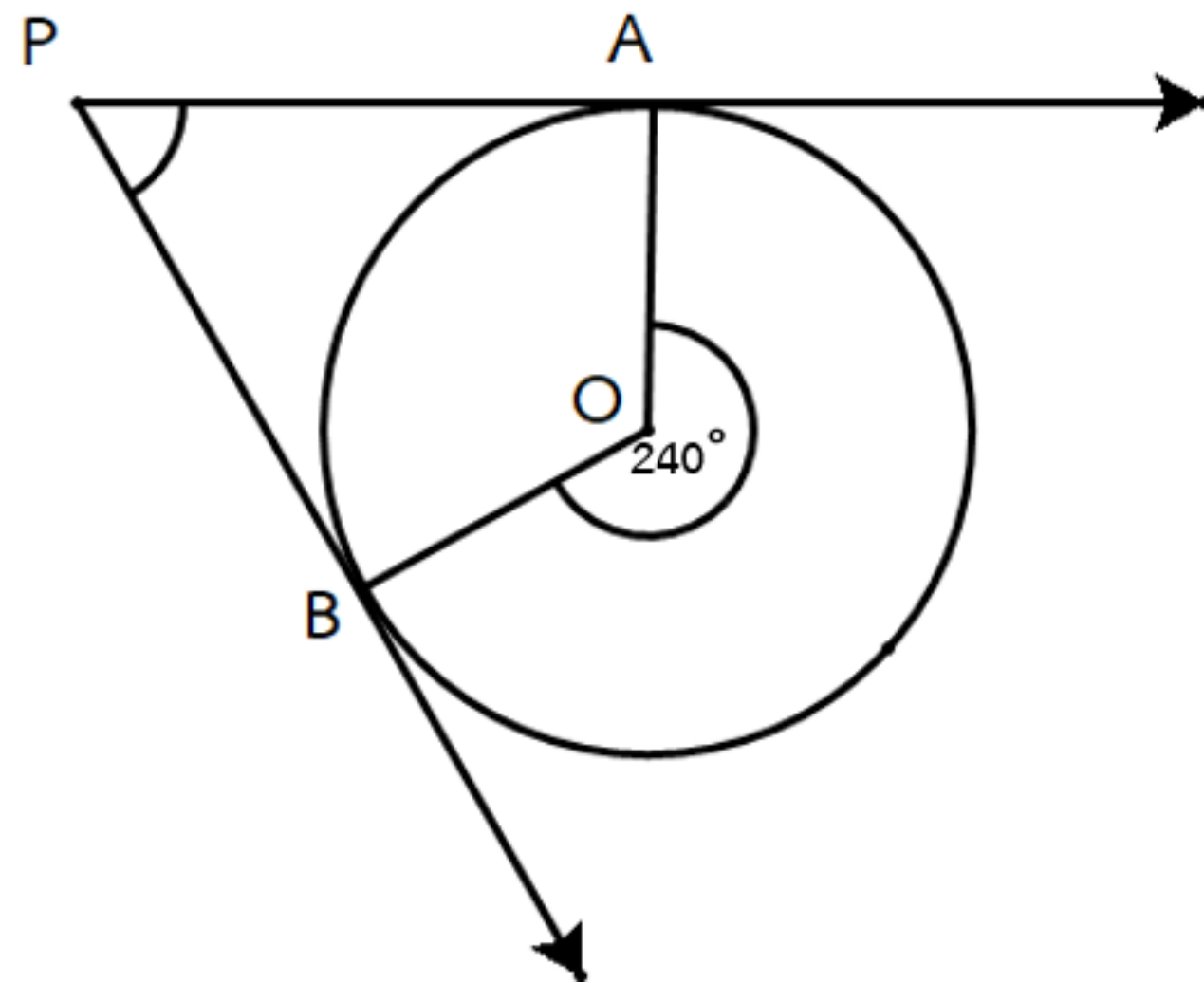
เนื่องจาก $\underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ$ ($\hspace{2cm}$)

จะได้ $\underline{\hspace{2cm}} = 180$

ดังนั้น $\underline{\hspace{2cm}}$

แบบฝึกหัด 8 : เส้นสัมผัสของวงกลม

ข้อที่ 2 จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x เมื่อ A และ B เป็นจุดสัมผัส



วิธีทำ เนื่องจาก $\angle AOB =$ _____

และเนื่องจากจุด A และจุด B เป็น _____

ทำให้ $\angle OAP =$ _____ $=$ _____

เนื่องจาก _____ $= 360^\circ$

จะได้ _____ $= 360$

เฉลย...

แบบฝึกหัด



ข้อที่ 1 จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด A และ $\widehat{BAC} = 43^\circ$ จงหาขนาดของ $\widehat{AOC}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\widehat{OAB} = 90^\circ$ (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส)

และ $\widehat{OAC} + \widehat{CAB} = \widehat{OAB}$

จะได้ $\widehat{OAC} + 43 = 90$

ดังนั้น $\widehat{OAC} = 47^\circ$

เนื่องจาก $OA = OC$ (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

จะได้ $\triangle AOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

และ $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 47^\circ$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $\widehat{AOC} + \widehat{OCA} + \widehat{OAC} = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°)

จะได้ $\widehat{AOC} + 47 + 47 = 180$

ดังนั้น $\widehat{AOC} = 86^\circ$



ข้อที่ 2 จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x เมื่อ A และ B เป็นจุดสัมผัส

วิธีทำ เนื่องจาก $\widehat{AOB}$

และเนื่องจากจุด A และจุด B เป็นจุดสัมผัส

ทำให้ $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = 90^\circ$

เนื่องจาก $\widehat{APB} + \widehat{PBO} + \widehat{BOA} + \widehat{OAP} = 360^\circ$

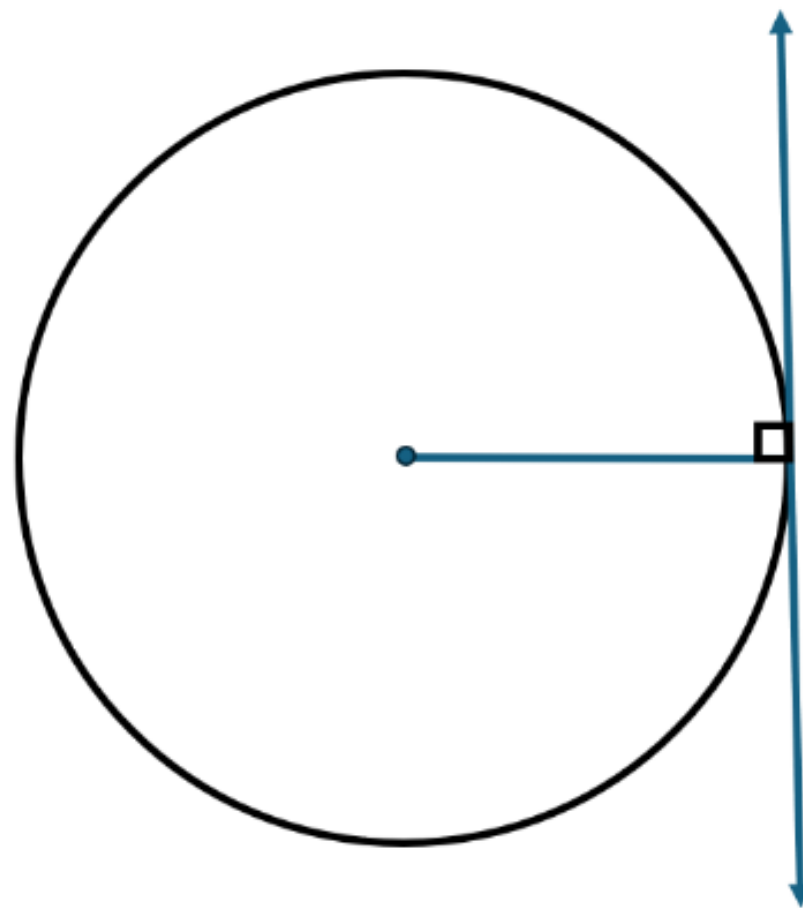
จะได้ $x + 90 + 120 + 90 = 360$

$$x = 60$$



สรุปบทเรียน

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี

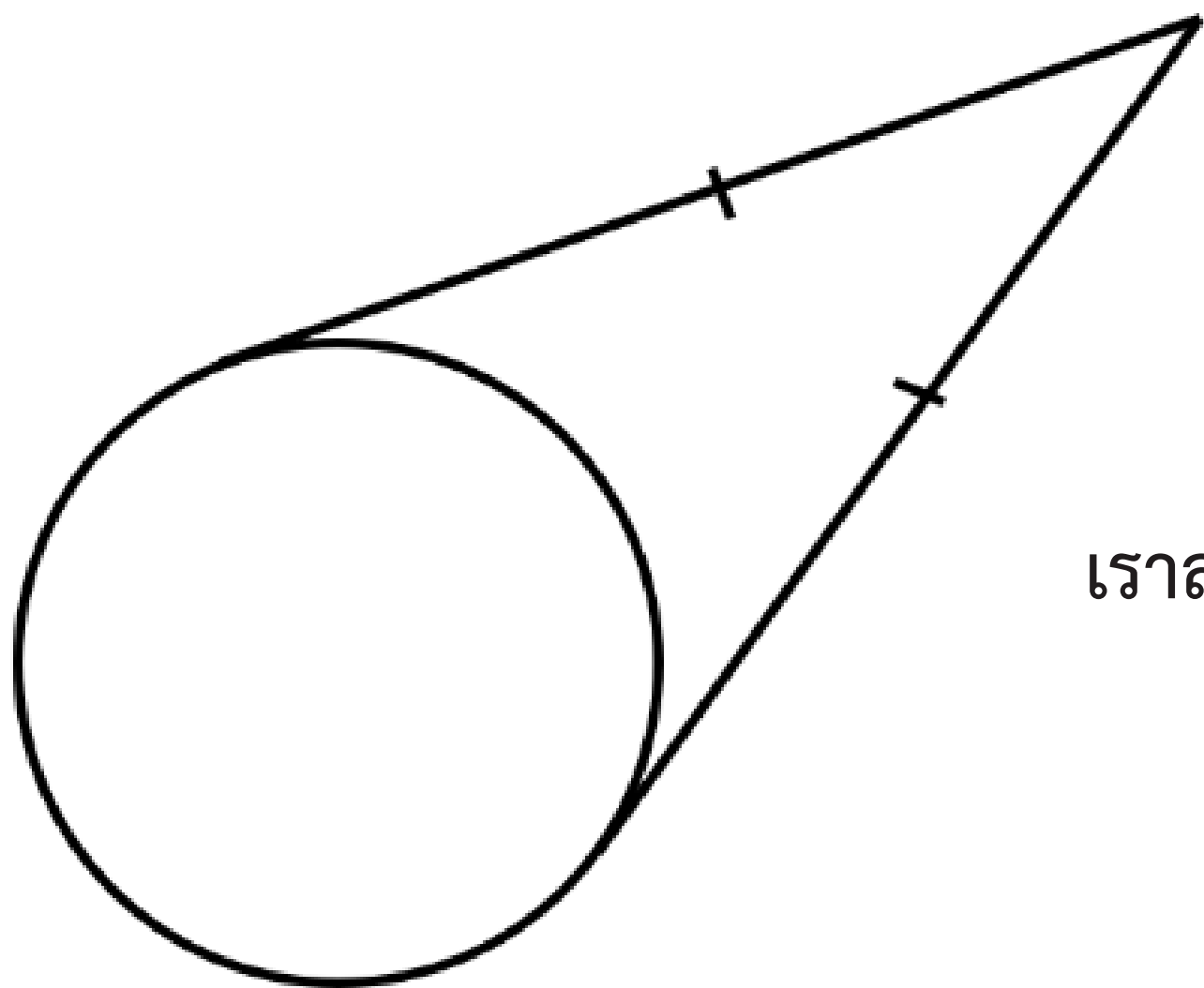


เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉาก
กับรัศมีที่จุดสัมผัส



สรุปบทเรียน

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี



ส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลม
มาสัมผัสวงกลมวงเดียวกันจะยาวเท่ากัน

เราสามารถนำความรู้นี้ไปใช้ร่วมกับทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมอื่น ๆ
รวมทั้งทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการแก้ปัญหาล่าง ๆ ได้



บทเรียนครั้งต่อไป

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

เล่นส้มผัสวงกลม (2)



สิ่งที่ต้องเตรียม

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

- แบบฝึกหัด 9 : เส้นสัมผัสวงกลม (2)
- ใบกิจกรรม 5 : เส้นสัมผัสกับคอร์ด
ของวงกลม

