

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค23102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
หน่วยที่ 2 วงกลม

เรื่อง ทฤษฎีบทของมุม
ในวงกลม

ครูผู้สอน ครูสรวิรัตน์ เดชะชาติ



ภาษาญี่ปุ่นของมูม ในวงกลม



จุดประสงค์การเรียนรู้

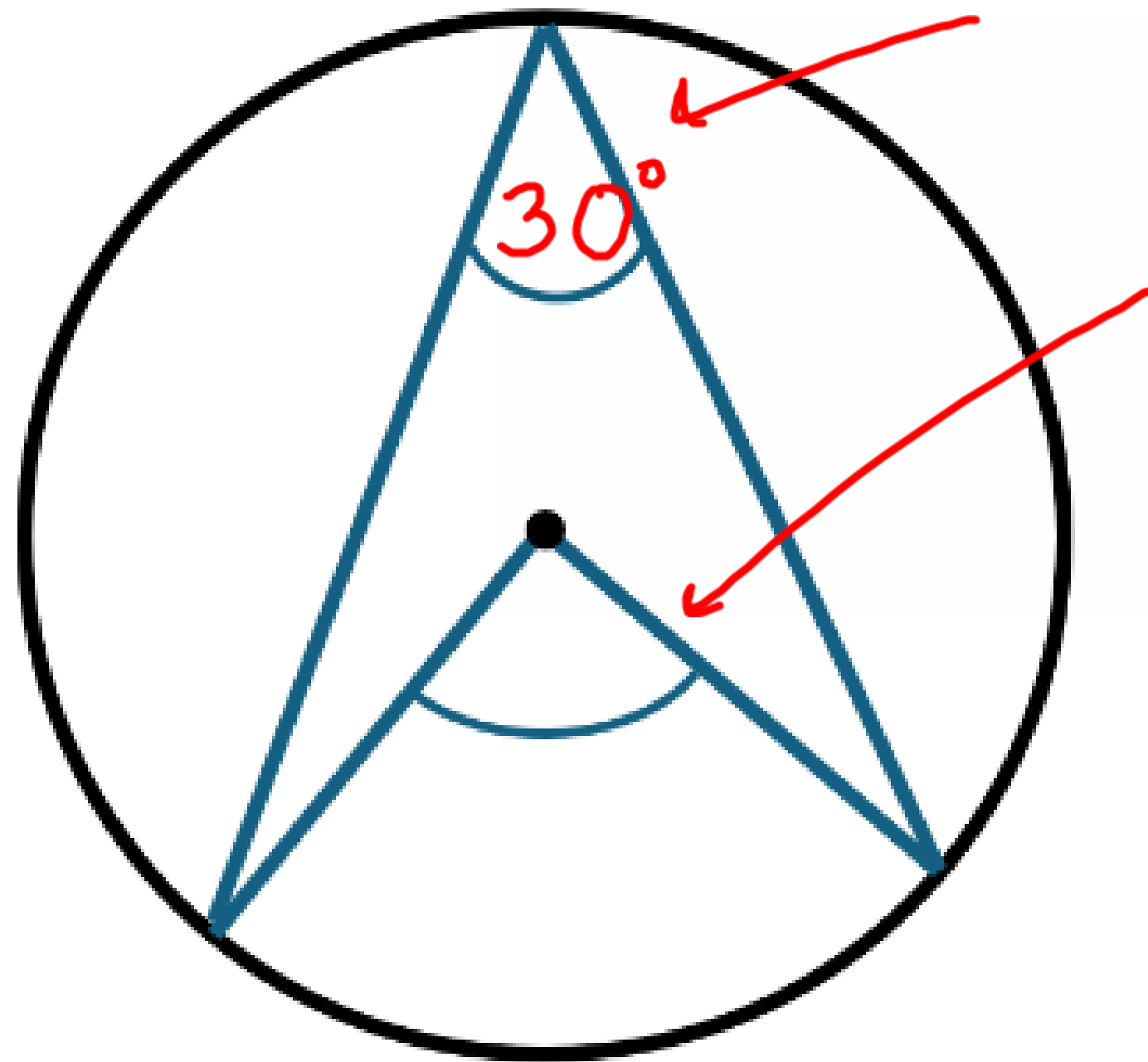


นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่
จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ
มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลมและทฤษฎีบทเกี่ยวกับ
รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

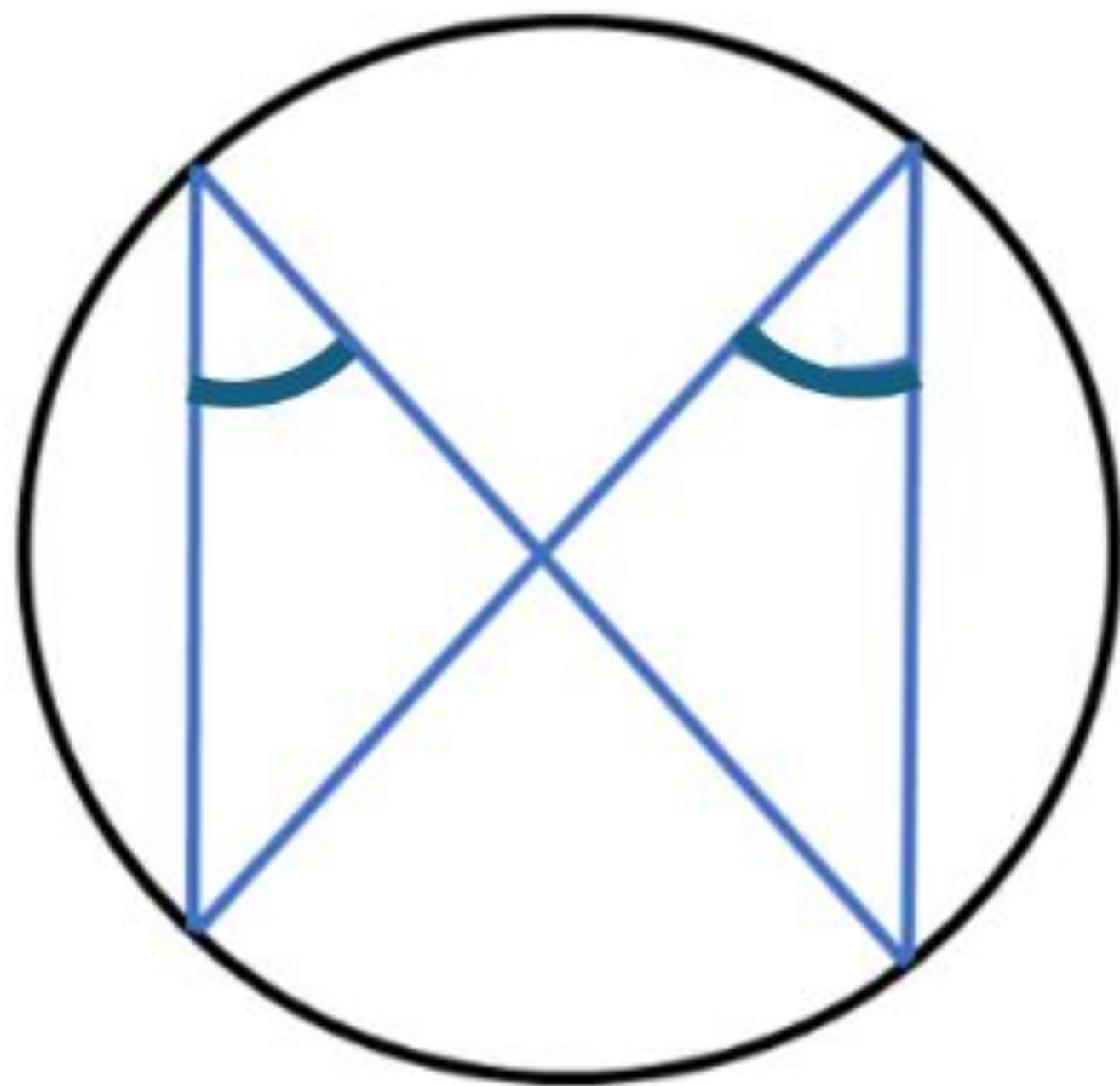


มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

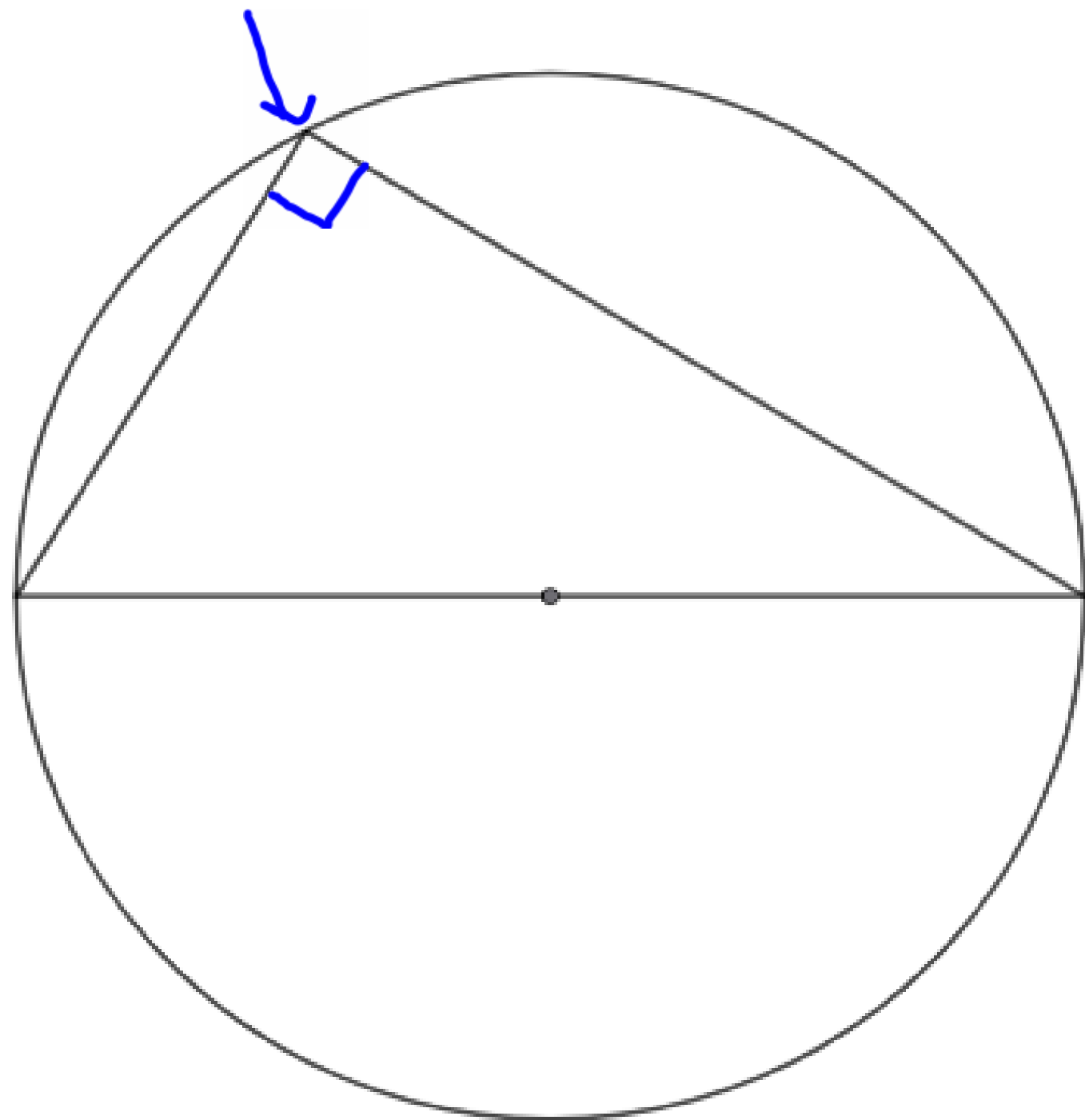
มีความสัมพันธ์กันอย่างไร



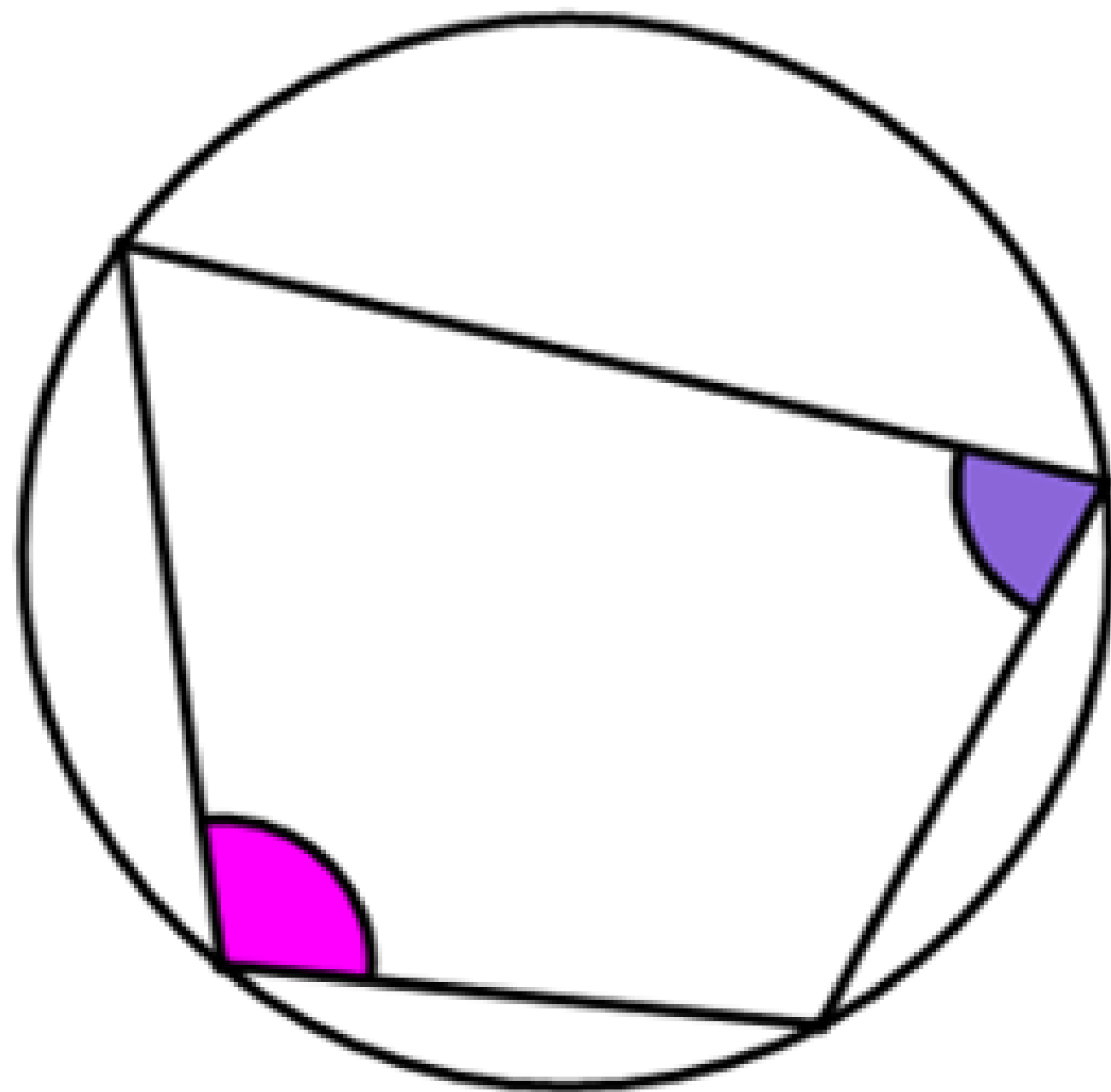
มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
มีความสัมพันธ์กันอย่างไร



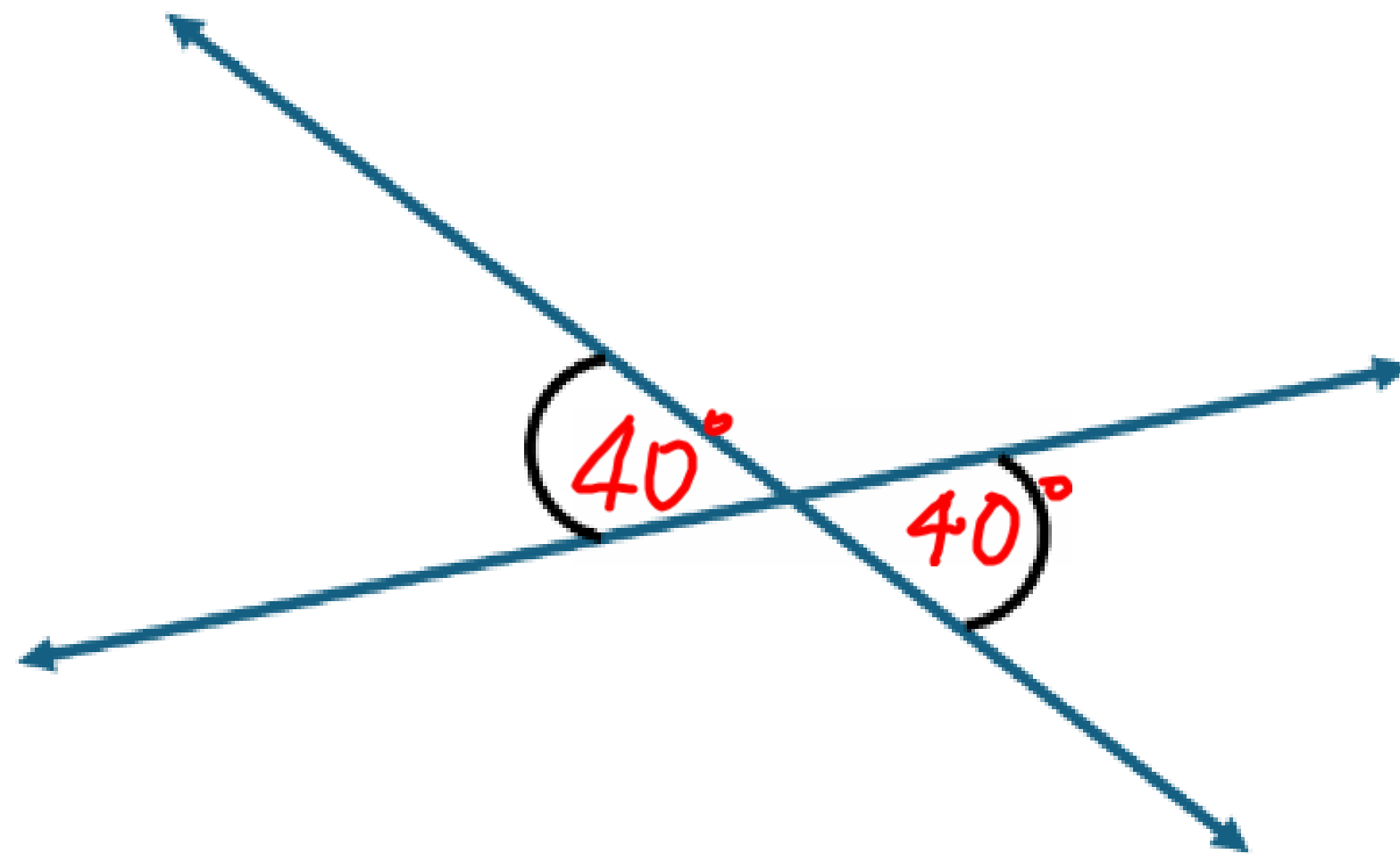
มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่าใด



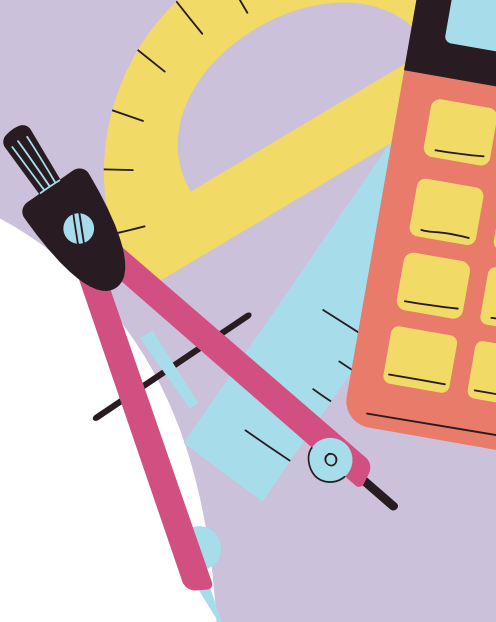
ผลบวกของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม มีขนาดเท่าใด



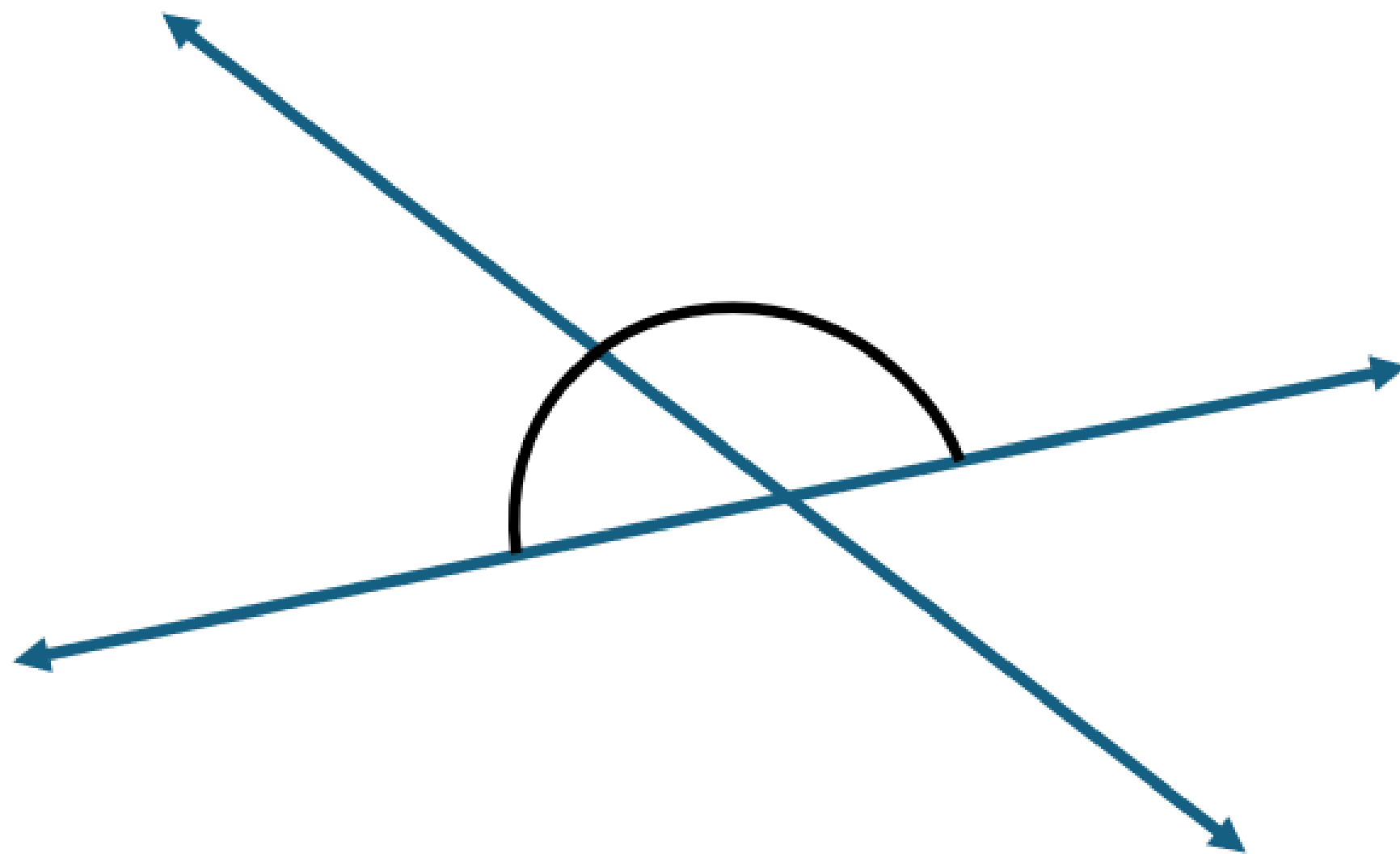
เมื่อเส้นตรงสองเส้นตัดกันขนาดของมุมตรงข้าม
จะเป็นอย่างไร



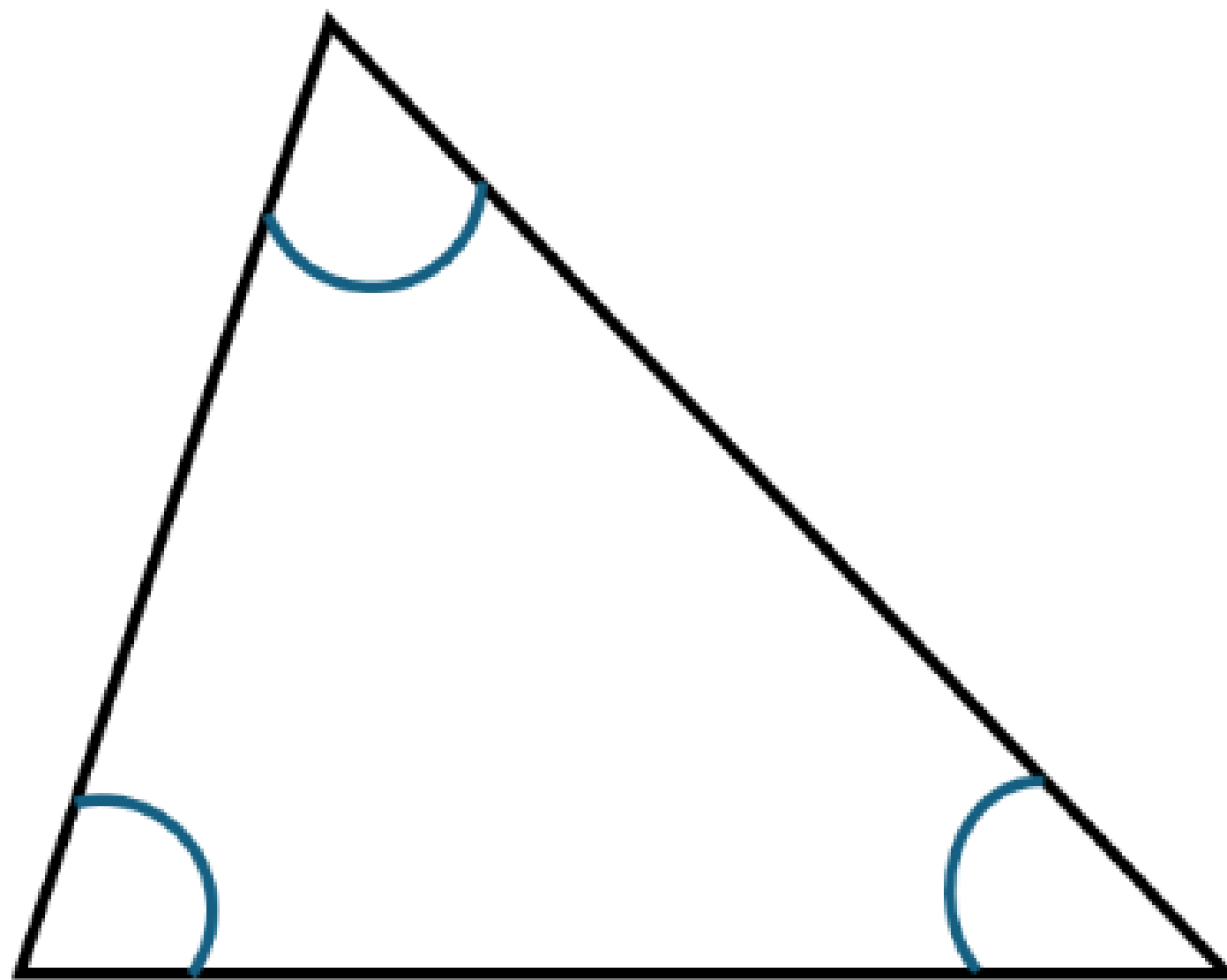
มุมตรงมีขนาดกี่องศา



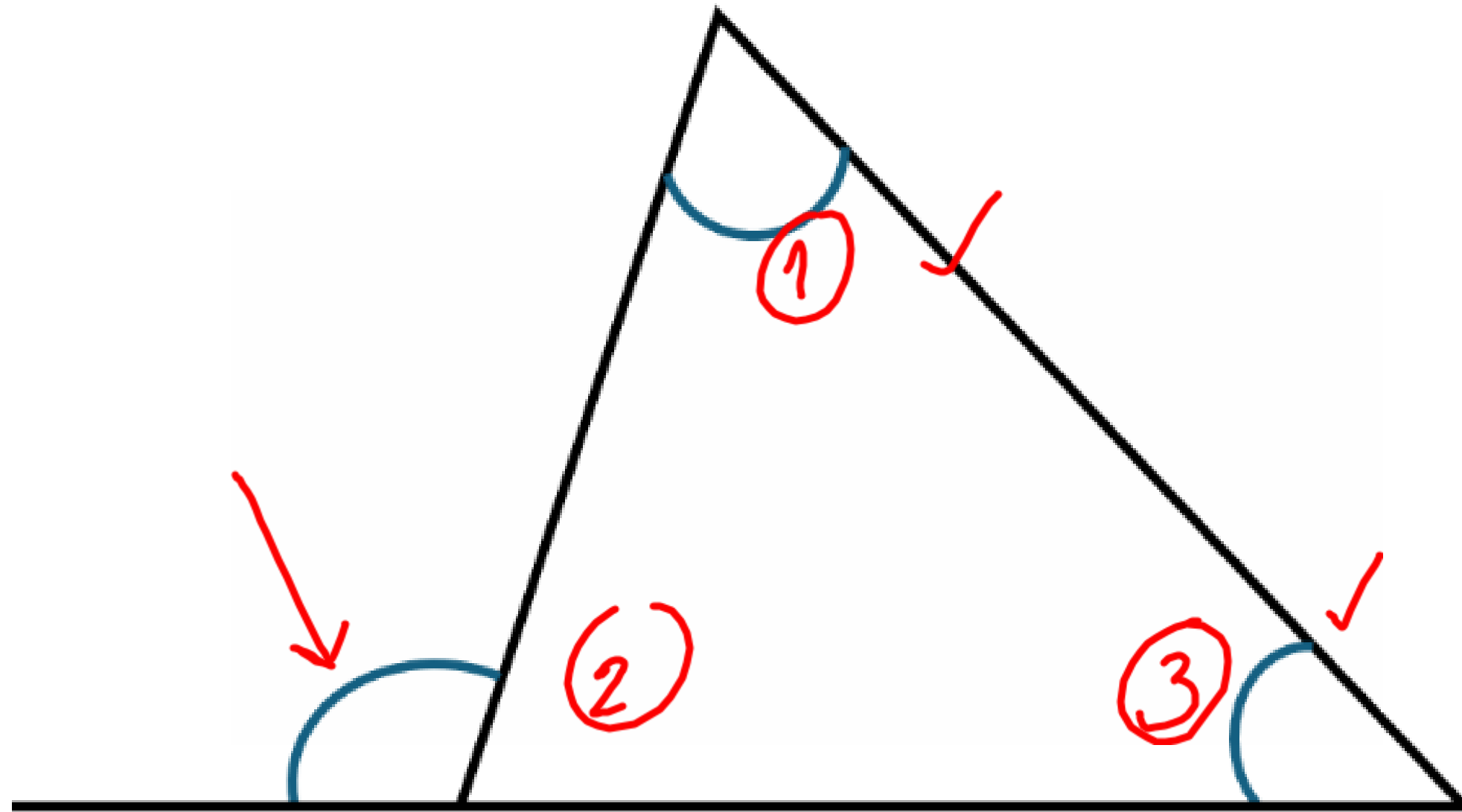
ผลบวกของมุมประชิดบนเส้นตรงมีขนาดกี่องศา



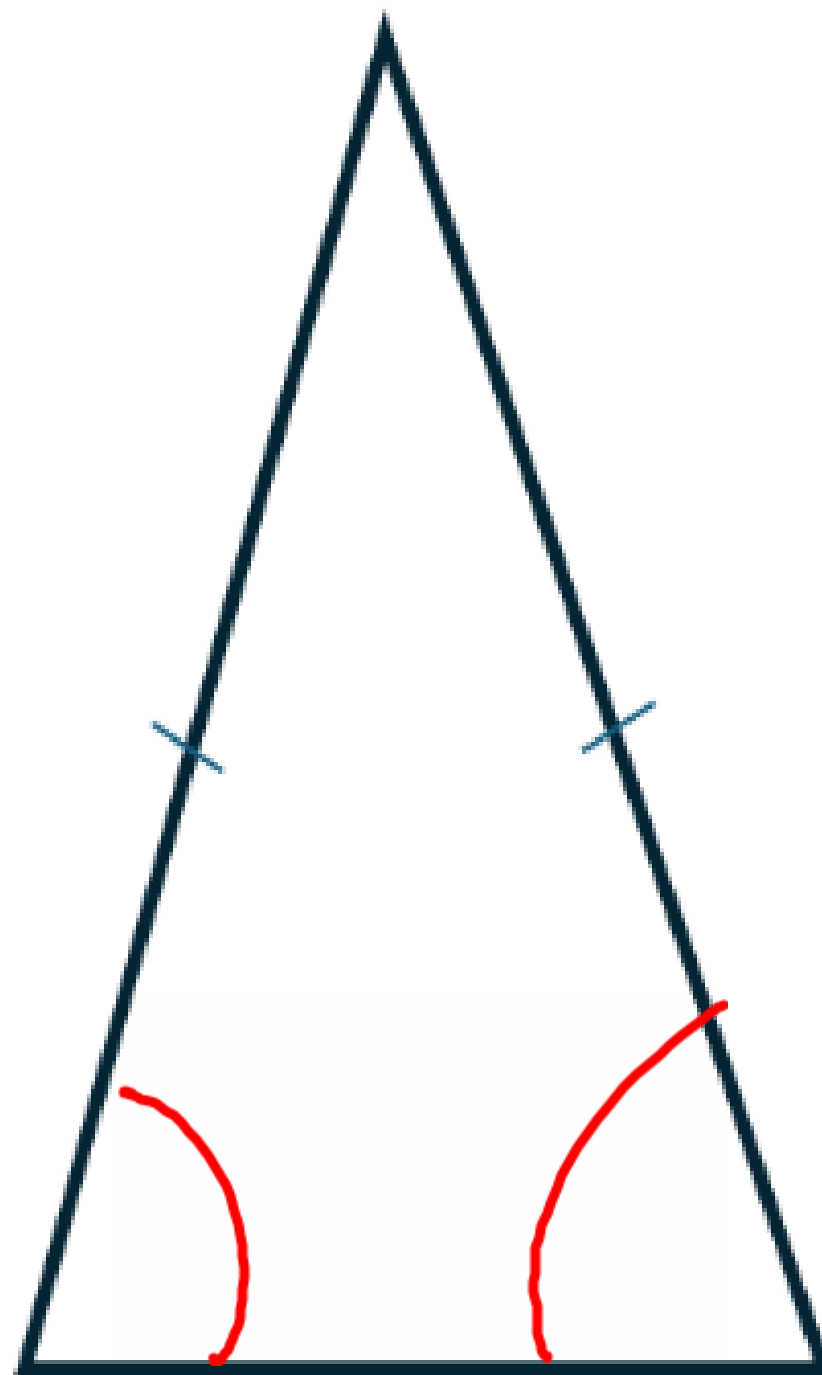
ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
เป็นเท่าใด



ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะเท่ากับ
ผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของ
มุมภายนอกนั้นหรือไม่

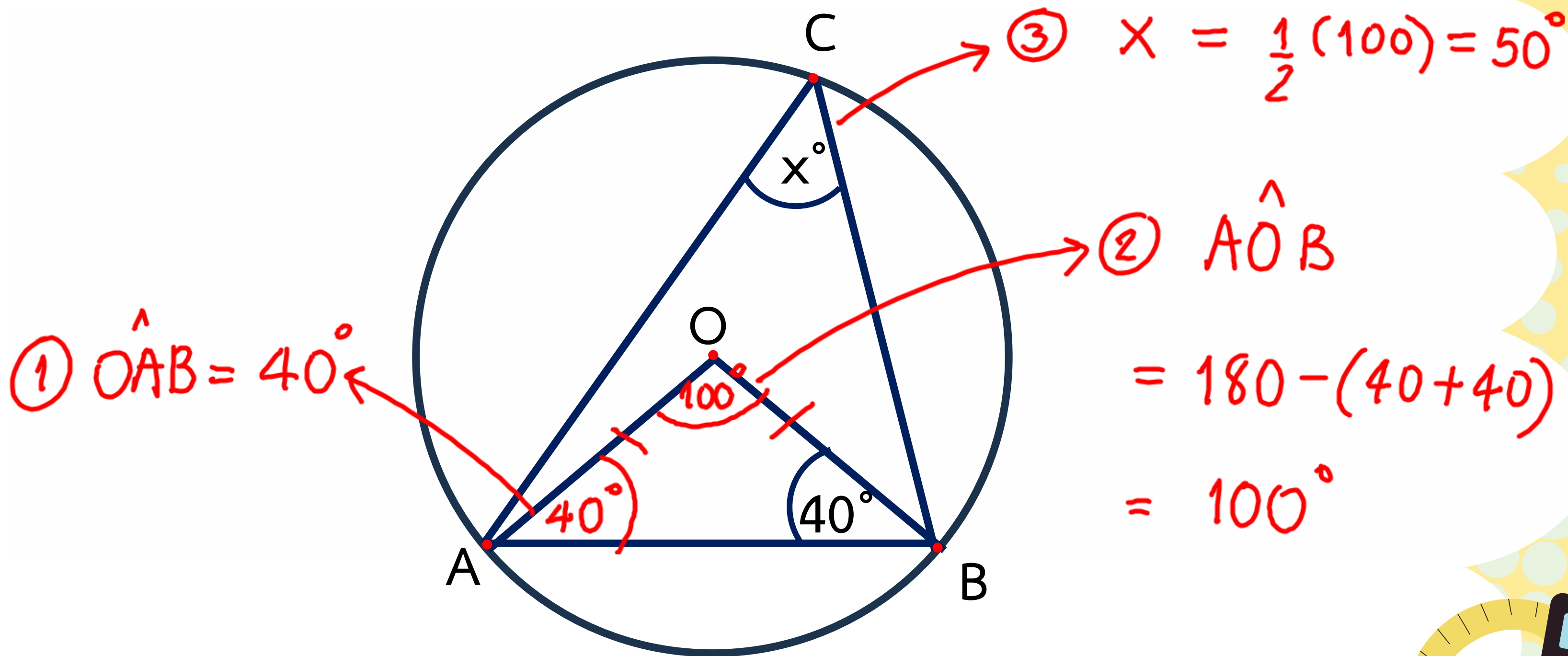


รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีลักษณะอย่างไรบ้าง



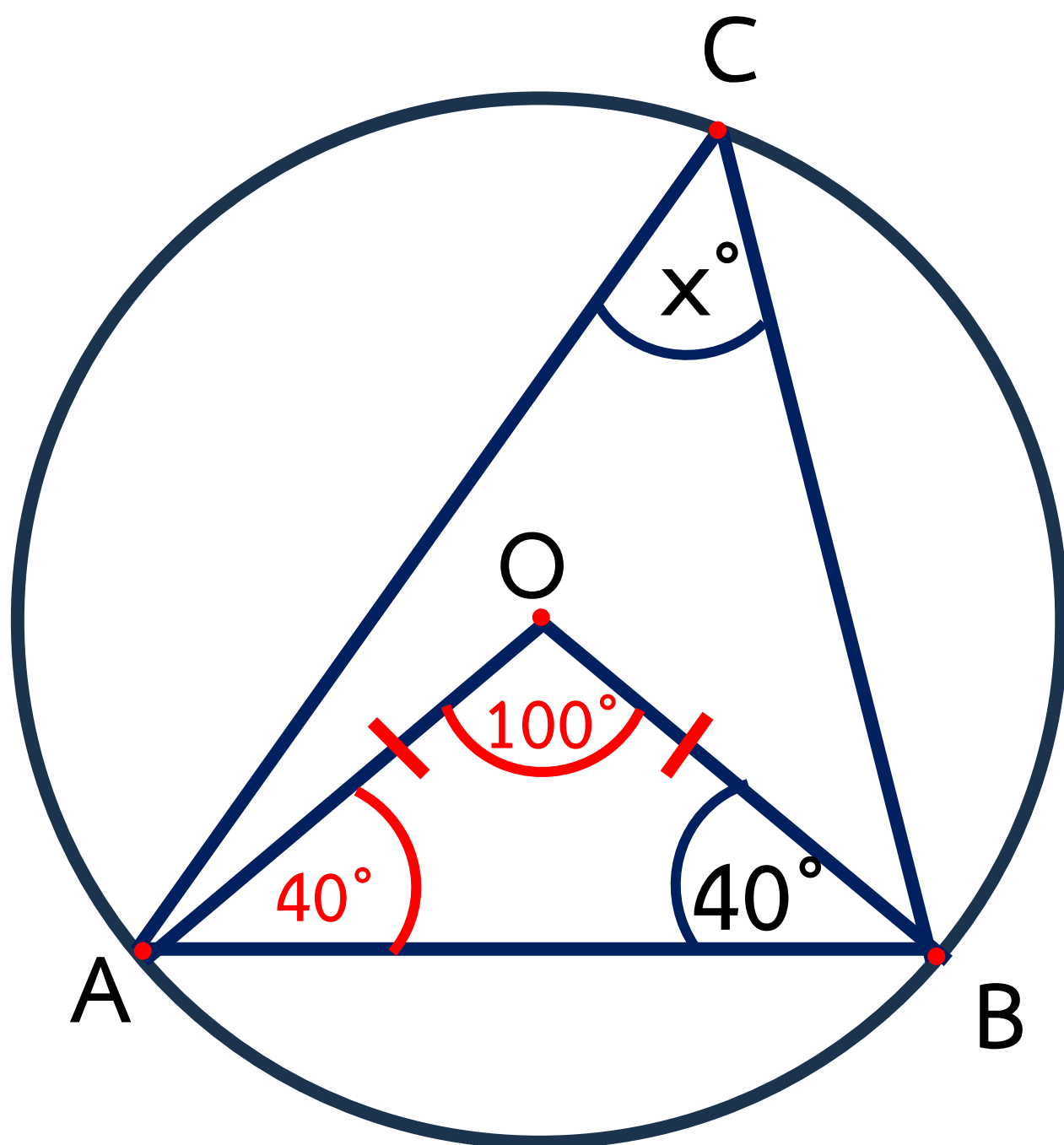
ตัวอย่างที่ 1

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



ตัวอย่างที่ 1

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



วิธีทำ เนื่องจาก $\triangle AOB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จึงได้ว่า $\angle OAB = \angle OBA = 40^\circ$

และ $\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ$

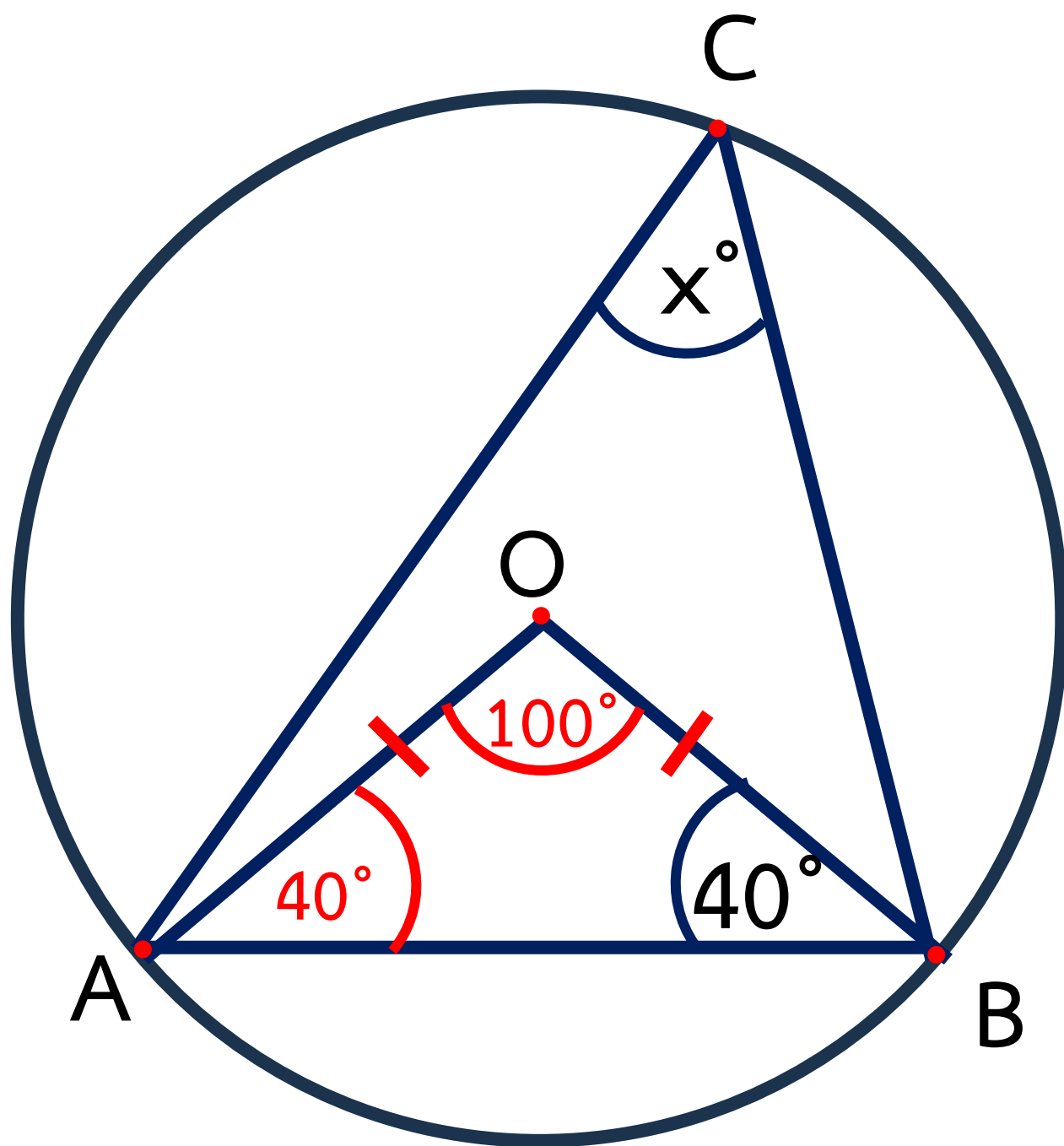
$$\angle AOB + 40 + 40 = 180$$

$$\angle AOB = 100$$

เนื่องจาก $\angle AOB$ และ $\angle ACB$ ต่างก็เป็นมุมที่
รองรับด้วยส่วนโค้ง AB

ตัวอย่างที่ 1

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



วิธีทำ เนื่องจาก $\angle AOB$ และ $\angle ACB$ ต่างก็เป็นมุมที่
รองรับด้วยส่วนโค้ง AB

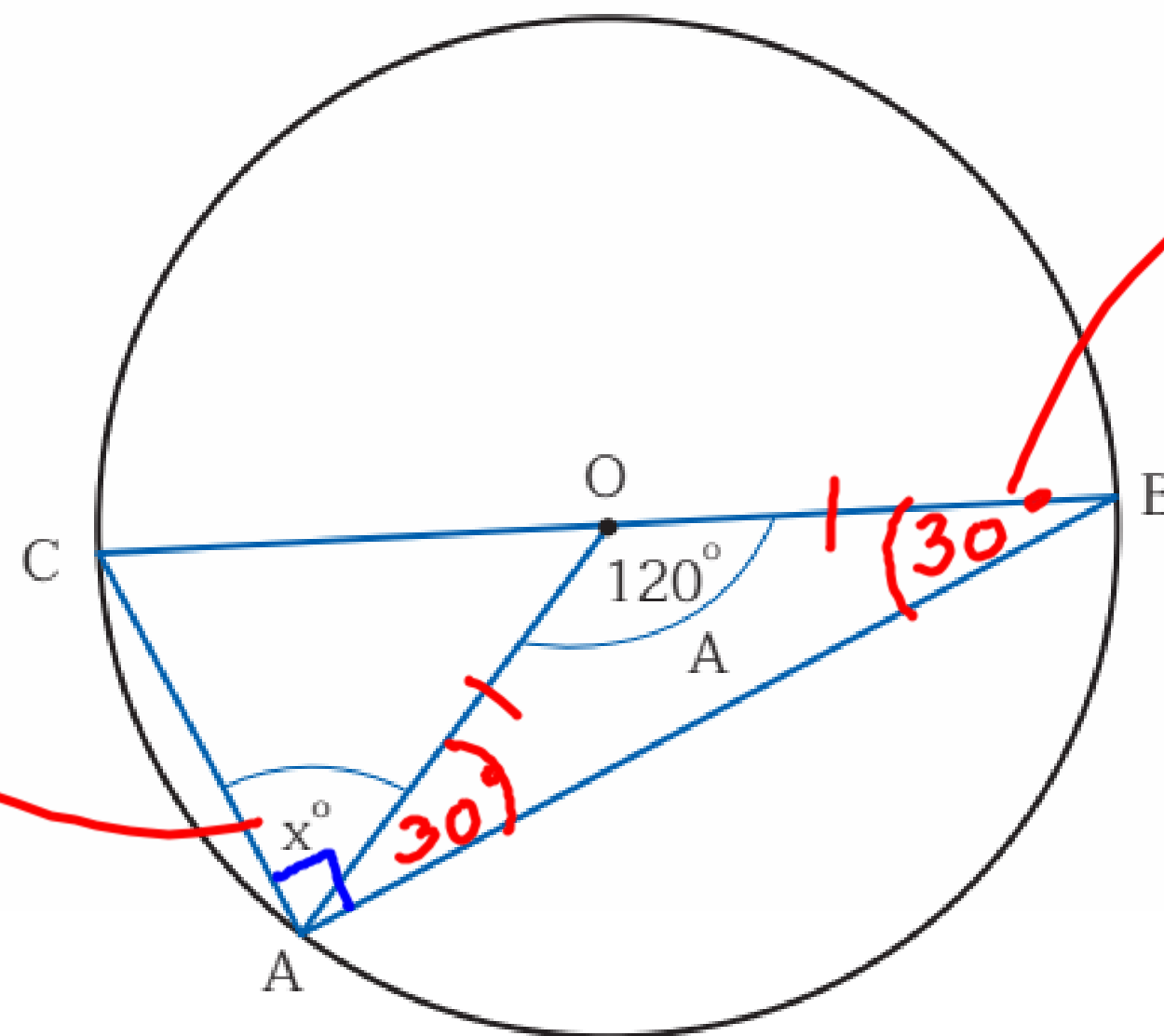
$$\text{จะได้ } \angle ACB = \frac{1}{2}(\angle AOB)$$

$$x = \frac{1}{2} \times 100$$

$$\text{ดังนั้น } x = 50$$

ตัวอย่างที่ 2

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



$$\textcircled{1} \angle OBA = \angle OAB$$

$$= \frac{180 - 120}{2}$$
$$= 30^\circ$$

$$\textcircled{2} x = 90 - 30$$
$$= 60$$

ตัวอย่างที่ 2

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x

วิธีทำ เนื่องจาก $\widehat{AOB} = 120^\circ$

และเนื่องจาก OA และ OB เป็นรัศมีของ
วงกลม

จึงได้ว่า รูปสามเหลี่ยม AOB เป็น
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$\text{จะได้ } \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$$

เนื่องจาก $\widehat{AOB} = 120^\circ$

30°

30°



ตัวอย่างที่ 2

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x

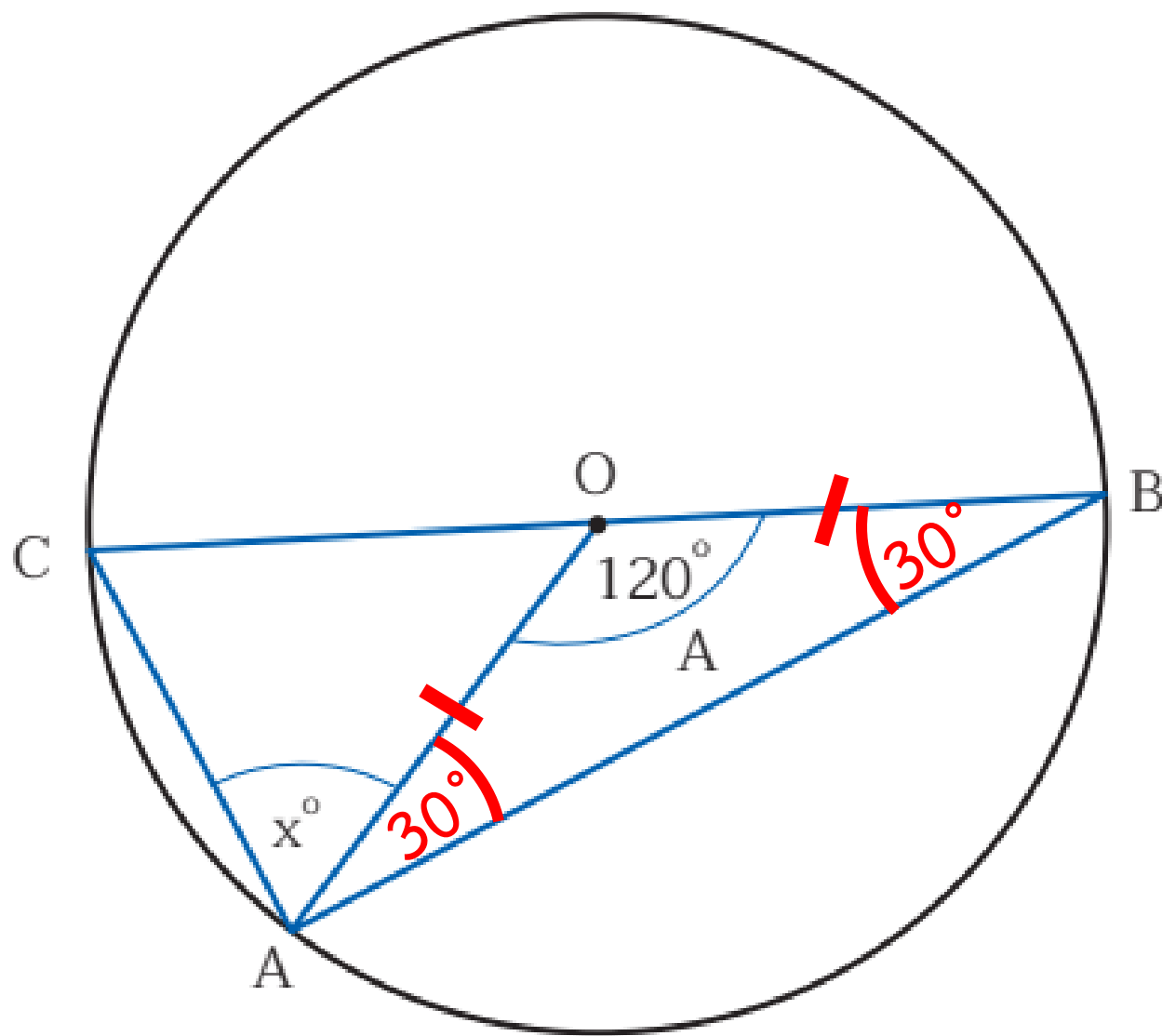
เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ACB เป็นรูปสามเหลี่ยม
ในครึ่งวงกลม

$$\text{จึงได้ว่า } \angle CAB = 90^\circ$$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } \angle CAO + \angle OAB = 90^\circ$$

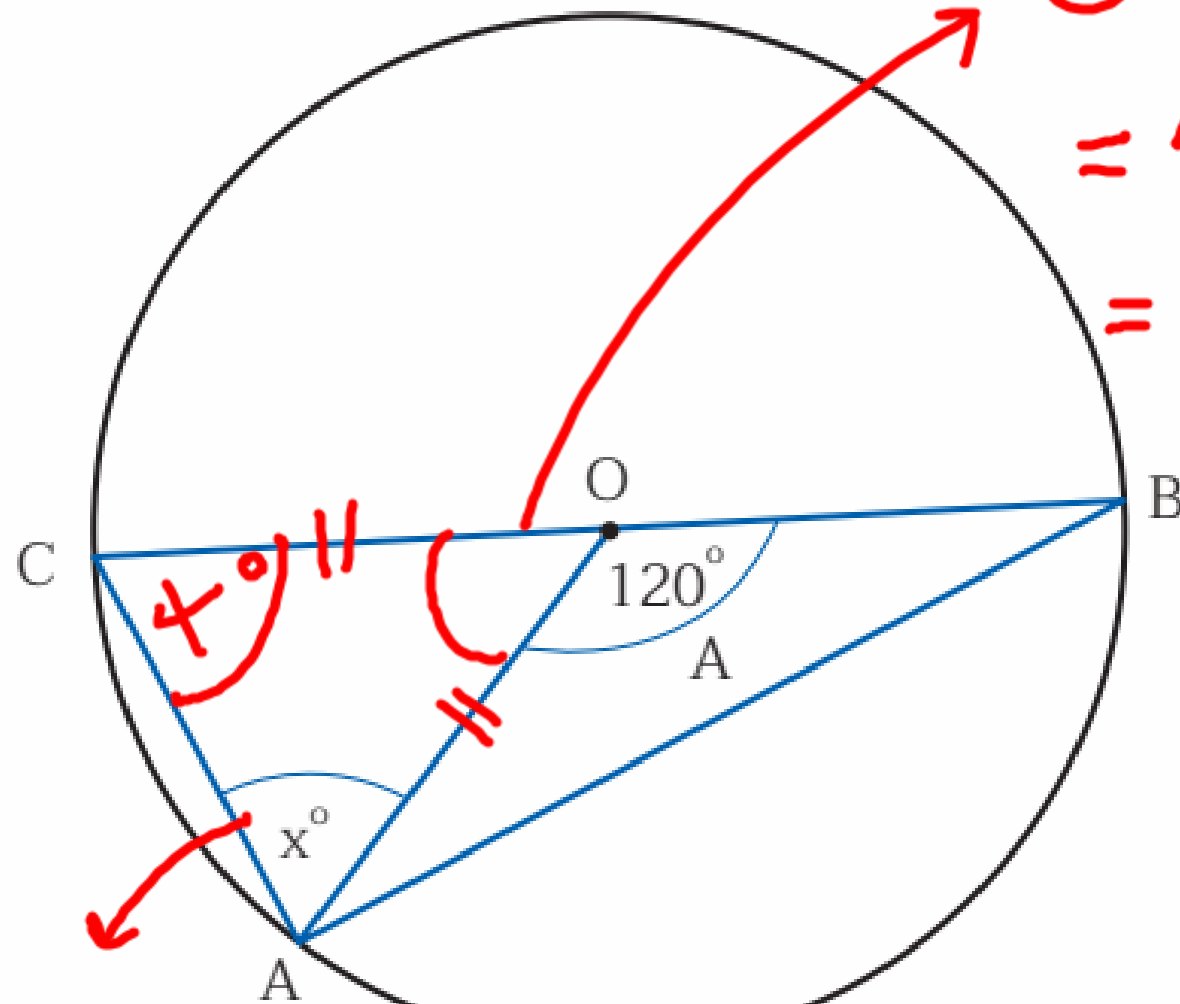
$$\text{จะได้ } x + 30 = 90$$

$$\text{ดังนั้น } x = 60$$



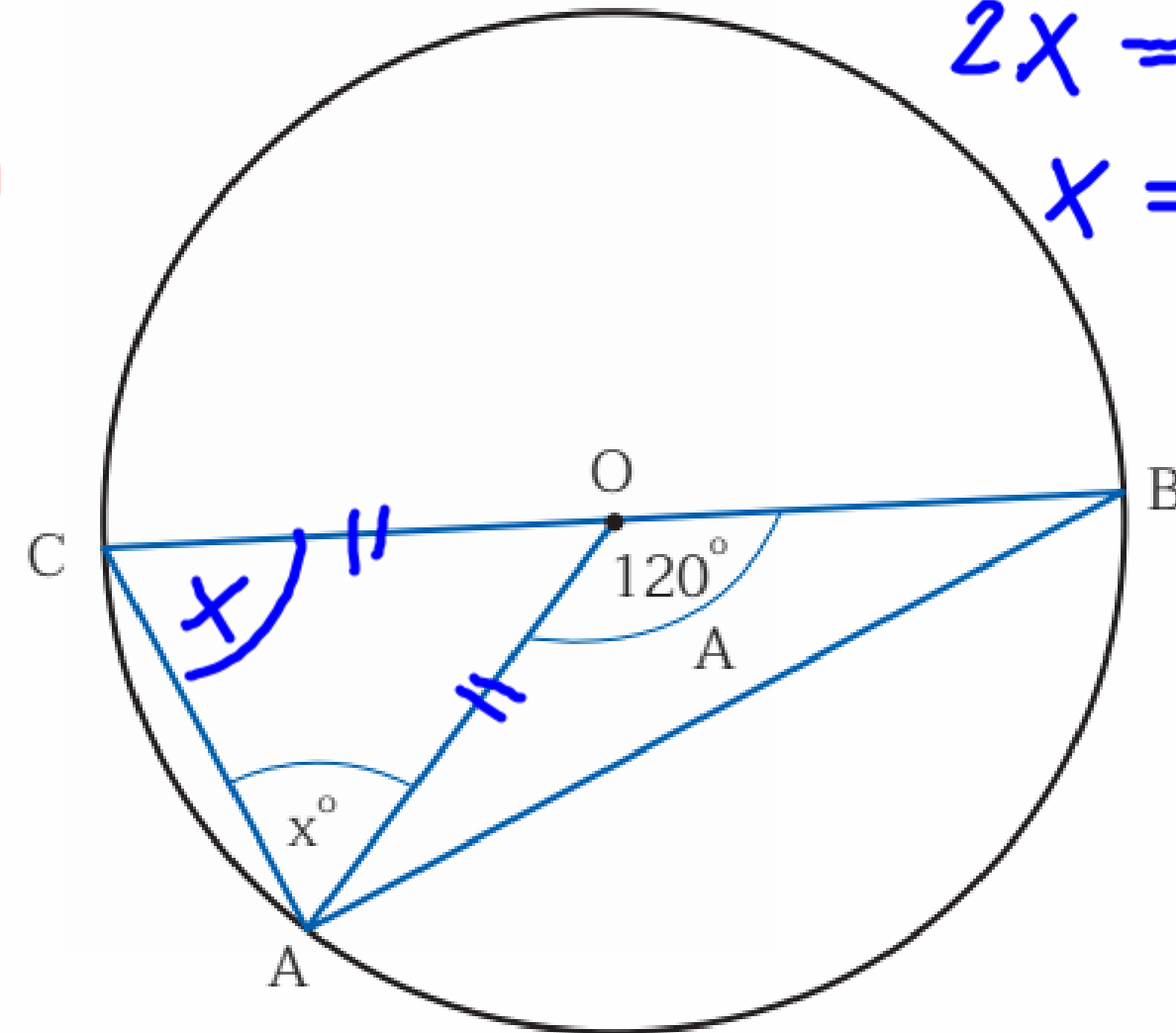
ตัวอย่างที่ 2

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \angle COA &= 180 - 120 \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} x = \frac{180 - 60}{2} = 60$$



$$\begin{aligned} x + x &= 120 \\ 2x &= 120 \\ x &= 60 \end{aligned}$$



แบบฝึกหัด 6

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

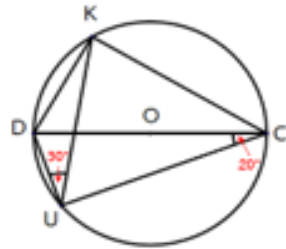
ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

แบบฝึกหัด 6 : ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

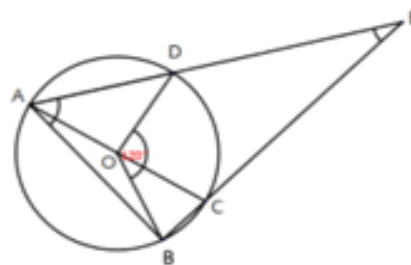
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม

รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. จากรูปสี่เหลี่ยม DUCK เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม O มี DC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O และ $\angle DCU = 20^\circ$ และ $\angle DOK = 30^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle URC$ และ $\angle CDK$

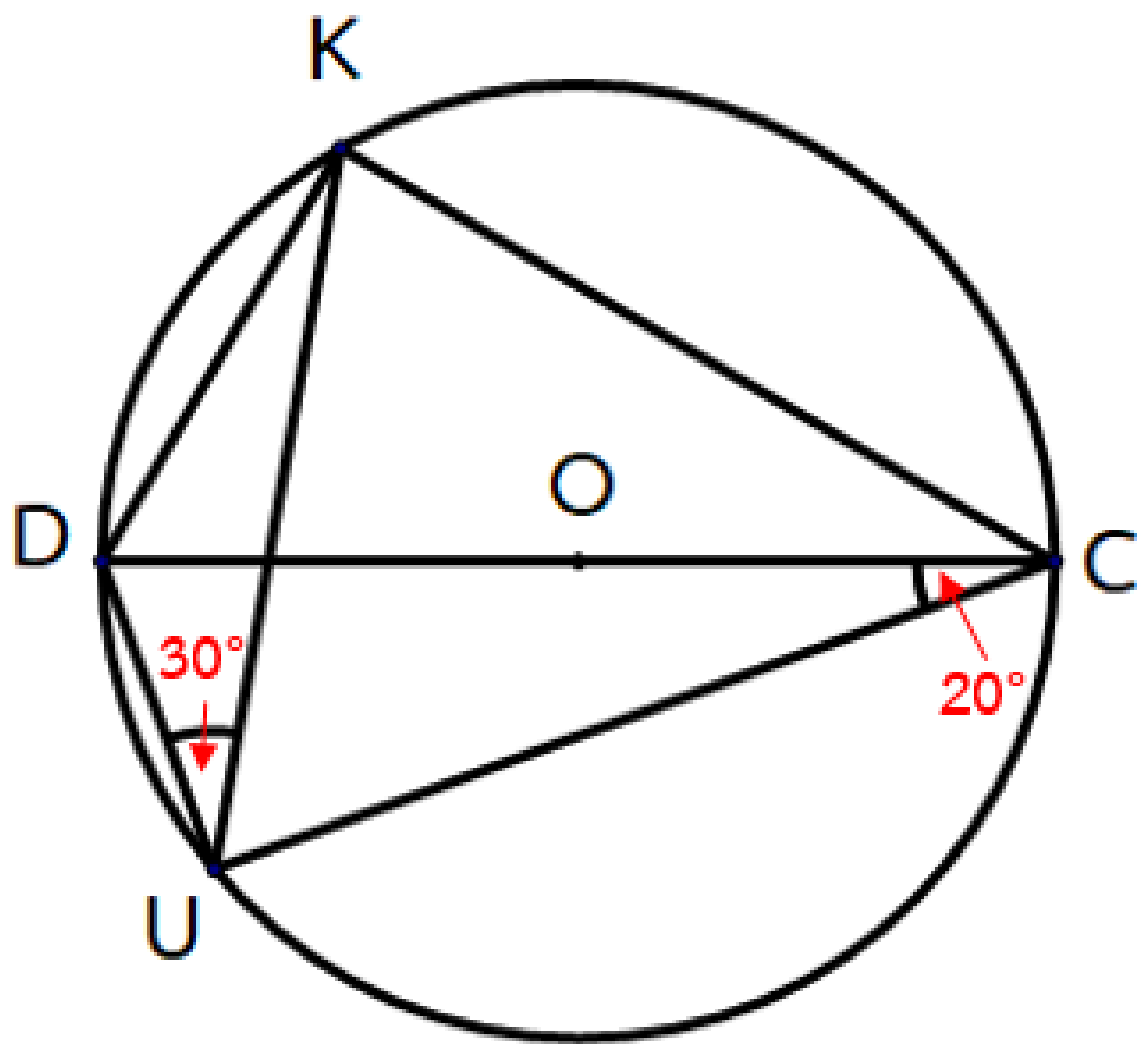


2. จากรูปวงกลม O มี AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม CE และ DE เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากต่อจาก BC และ AD ตามลำดับ และ $\angle BOD = 120^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle AEB$



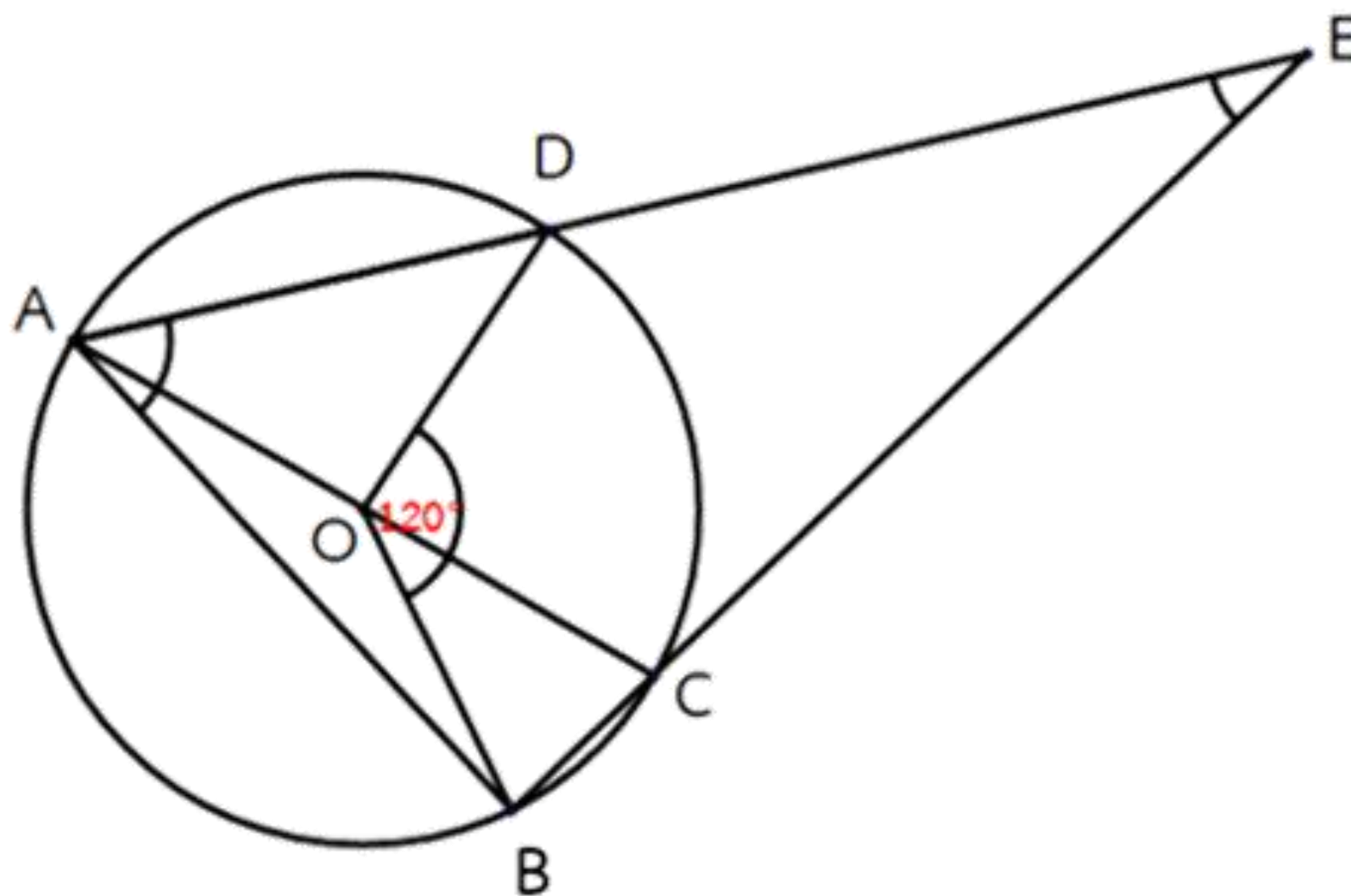
แบบฝึกหัด 6 : ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

ข้อที่ 1. จากรูปสี่เหลี่ยม DUCK เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม O มี $\overline{DC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O และ $\widehat{DCU} = 20^\circ$ และ $\widehat{DKU} = 30^\circ$ จงหาขนาดของ $\widehat{UKC}$ และ $\widehat{CDK}$



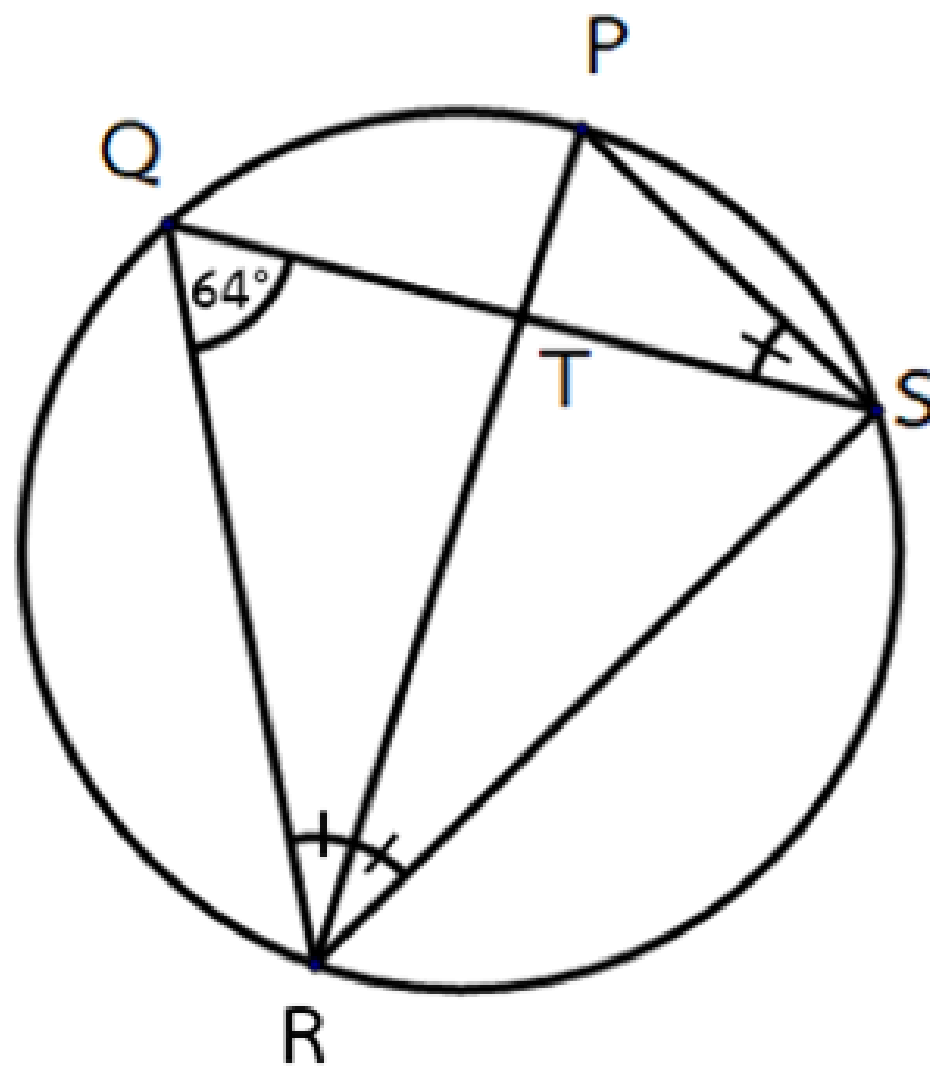
แบบฝึกหัด 6 : ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

ข้อที่ 2. จากรูปวงกลม O มี $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม $\overline{CE}$ และ $\overline{DE}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากต่อจาก $\overline{BC}$ และ $\overline{AD}$ ตามลำดับ และ $\angle BOD = 120^\circ$
จงหาขนาดของ $\angle AEB$



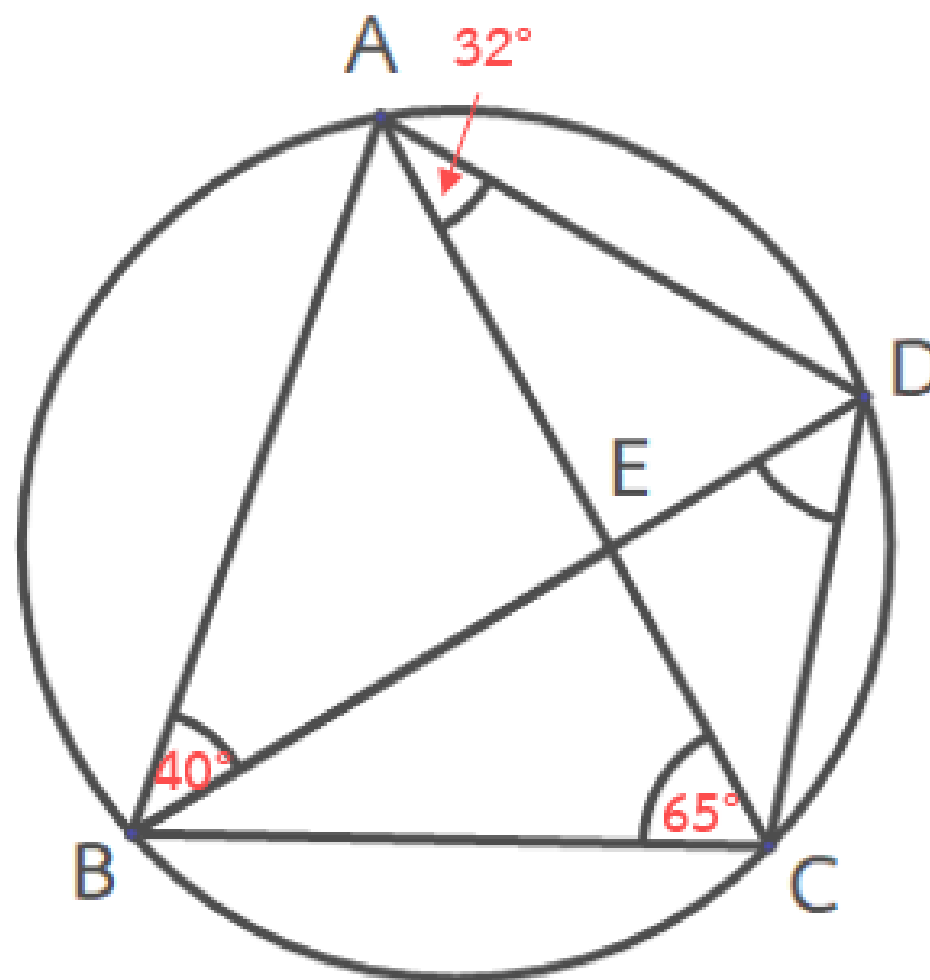
แบบฝึกหัด 6 : ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

ข้อที่ 3. กำหนดให้ $\overline{QS}$ ตัด $\overline{RP}$ ที่จุด T , $QR = QS$, $\angle RQS = 64^\circ$
และ $\overline{RP}$ แบ่งครึ่ง $\angle RQS$ จงหาขนาดของ $\angle PSQ$



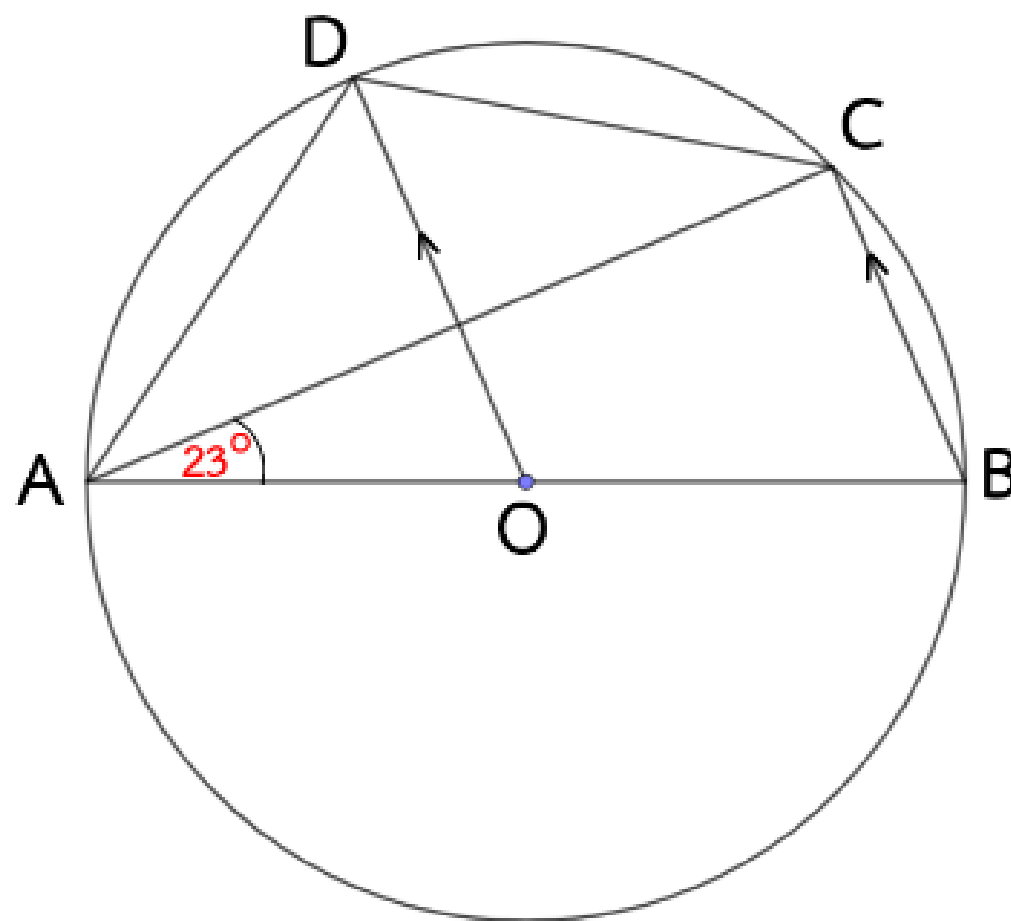
แบบฝึกหัด 6 : ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

ข้อที่ 4. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัด $\overline{BD}$ ที่จุด E $\angle EAD = 32^\circ$, $\angle ABE = 40^\circ$
และ $\angle BCE = 65^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle CDE$



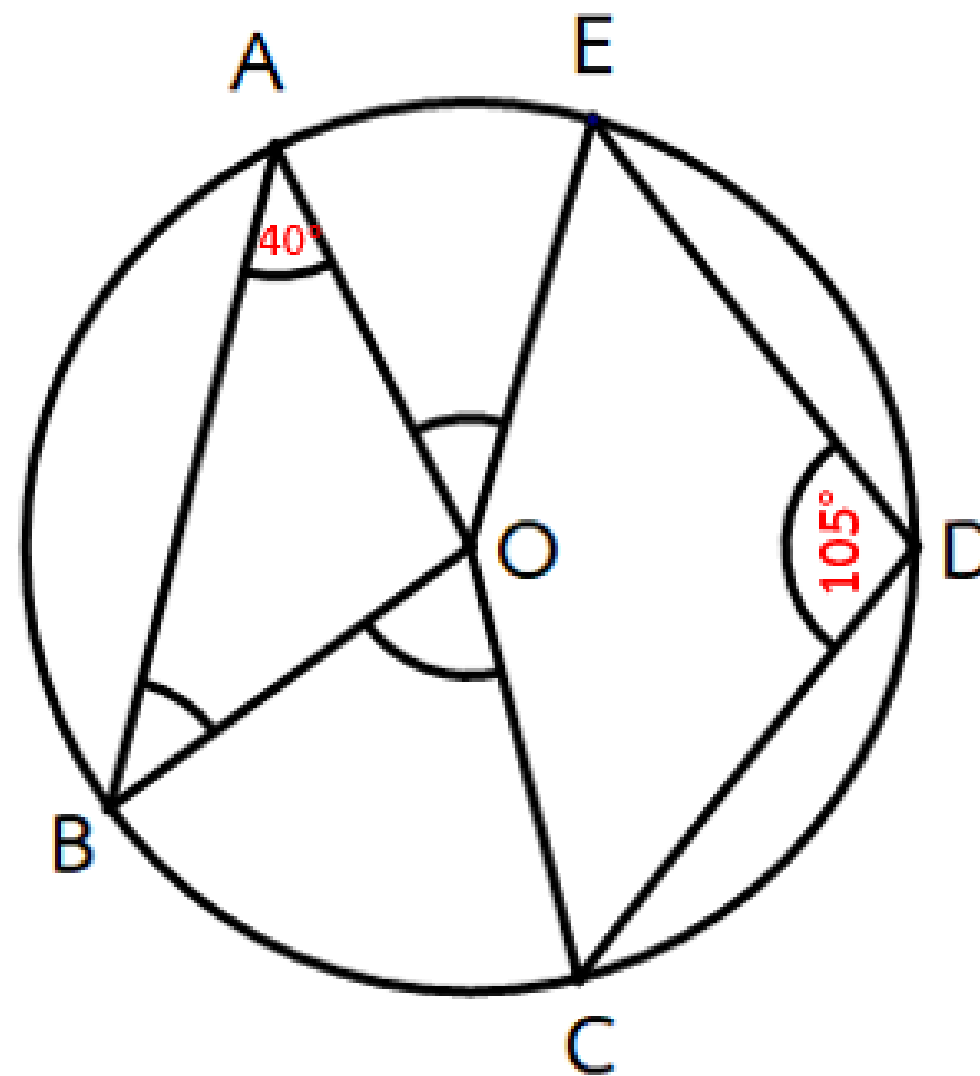
แบบฝึกหัด 6 : ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

ข้อที่ 5. จากรูป $\widehat{ACB}$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม O $\overline{OD} \parallel \overline{BC}$ และ $\widehat{BAC} = 23^\circ$
จงหาขนาดของ $\widehat{ADO}$



แบบฝึกหัด 6 : ทฤษฎีบทของมุมในวงกลม

ข้อที่ 6. จากรูป จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\widehat{BAO} = 40^\circ$ และ $\widehat{CDE} = 105^\circ$
จงหาว่า $\widehat{AOE} + \widehat{BOC}$ เท่ากับกี่องศา

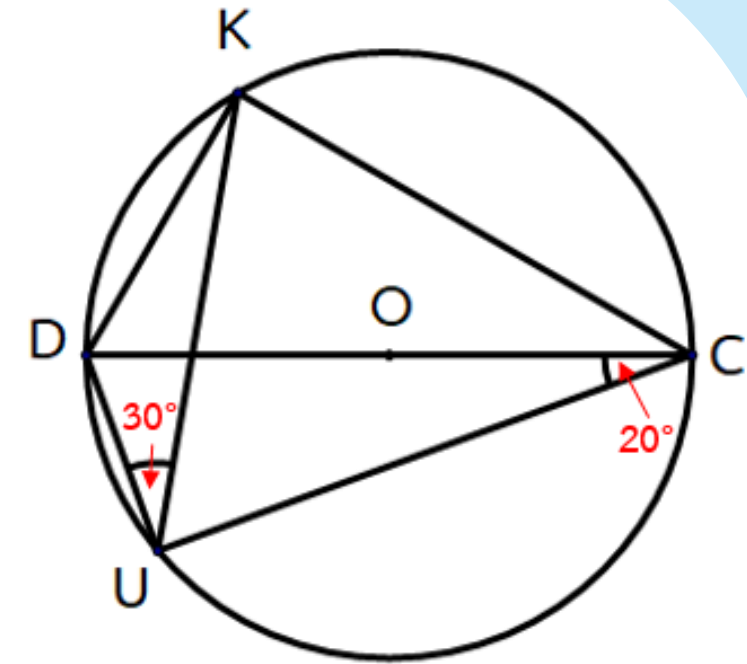


เฉลย...

แบบฝึกหัด



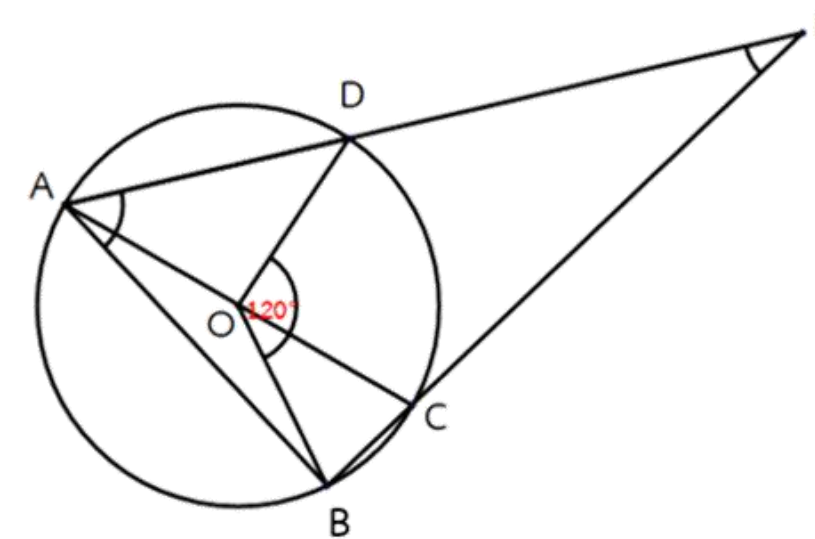
ข้อที่ 1. จากรูปสี่เหลี่ยม DUCK เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม O มี $\overline{DC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O และ $\widehat{DCU} = 20^\circ$ และ $\widehat{DUK} = 30^\circ$ จงหาขนาดของ $\widehat{UKC}$ และ $\widehat{CDK}$



วิธีทำ	จาก	$\widehat{DCU}$	=	20°	(กำหนดให้)
	และ	$\widehat{DUK}$	=	30°	(กำหนดให้)
	จะได้	$\widehat{DKU}$	=	20°	} (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน)
	และ	$\widehat{DCK}$	=	30°	
	จาก	$\widehat{DKC}$	=	90°	(ขนาดของมุมในครึ่งวงกลมเป็น 90°)
	จึงได้ว่า	$\widehat{UKC}$	=	$90 - 20$	= 70°
	และ	$\widehat{CDK}$	=	$180 - (90 + 30)$	= 60° (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°)



ข้อที่ 2. จากรูปวงกลม O มี $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
 $\overline{CE}$ และ $\overline{DE}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากต่อจาก $\overline{BC}$ และ $\overline{AD}$
 ตามลำดับ และ $\angle BOD = 120^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle AEB$



วิธีทำ จาก $\angle BOD = 120^\circ$
 และ $\angle BAD = 60^\circ$

จะได้ $\angle ABC = 90^\circ$
 ดังนั้น $\angle AEB = 180 - (90 + 60) = 30^\circ$

(กำหนดให้)

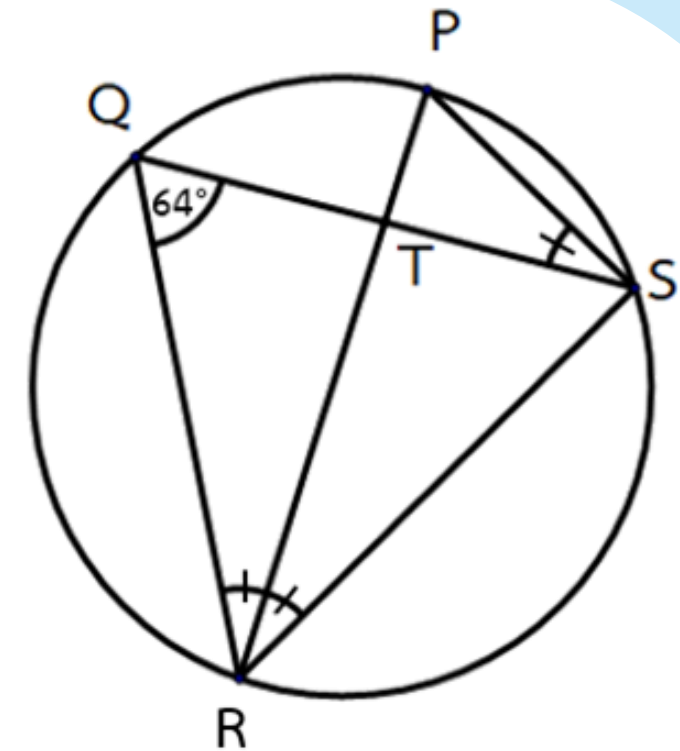
(มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่า
 ของขนาดของมุมในส่วนโค้งของ
 วงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

(ขนาดของมุมในครึ่งวงกลมเป็น 90°)

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของ
 รูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°)



ข้อที่ 3. กำหนดให้ $\overline{QS}$ ตัด $\overline{RP}$ ที่จุด T , $QR = QS$, $\angle RQS = 64^\circ$
และ $\overline{RP}$ แบ่งครึ่ง $\angle QRS$ จงหาขนาดของ $\angle PSQ$



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยม $\triangle QRS$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ($QR = QS$)

จะได้ $\angle QRS = \angle QSR$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $\angle QRS + \angle QSR + \angle RQS = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°)

ดังนั้น $2(\angle QRS) + 64 = 180^\circ$



จะได้

$$\angle QRS = 58^\circ$$

เนื่องจาก

$$\angle QRS = \angle QRP + \angle PRS$$

และ

$$\angle QRP = \angle PRS \quad (\overline{RP} \text{ แบ่งครึ่ง } \angle QRS)$$

จะได้

$$\begin{aligned} \angle QRP &= \frac{\angle QRS}{2} \\ &= \frac{58}{2} \end{aligned}$$

และจาก

$$\angle QRP = 29^\circ$$

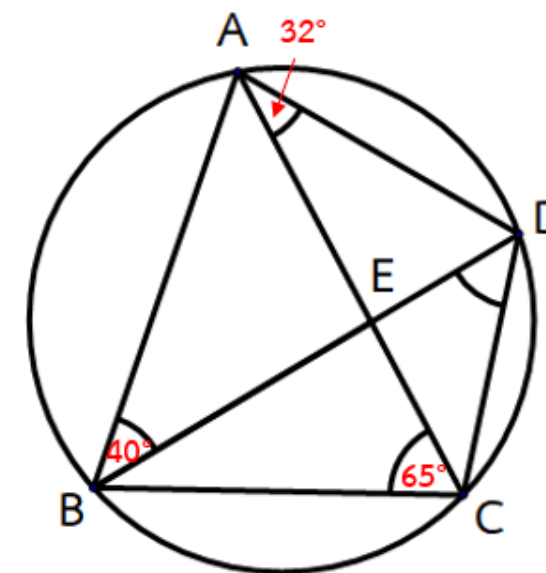
$$\angle QRP = \angle PSQ \quad (\text{มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน})$$

ดังนั้น

$$\angle PSQ = 29^\circ$$



ข้อที่ 4. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัด $\overline{BD}$ ที่จุด E $\angle EAD = 32^\circ$,
 $\angle ABE = 40^\circ$ และ $\angle BCE = 65^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle CDE$



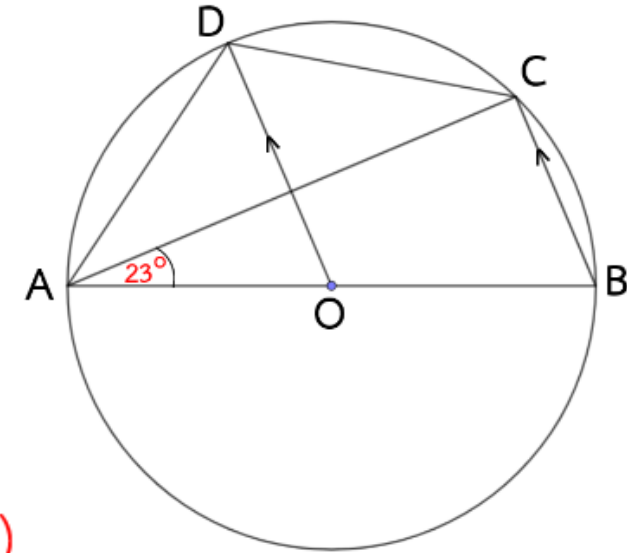
วิธีทำ เนื่องจาก $\angle ACD = \angle ABE = 40^\circ$ } (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย
 และ $\angle ADB = \angle BCE = 65^\circ$ } ส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน)
 เนื่องจาก $\angle CAD + \angle ACD + (\angle ADB + \angle CDE) = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของ
 รูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°)

จะได้ $\angle CDE = 180 - (32 + 40 + 65)$

ดังนั้น $\angle CDE = 43^\circ$



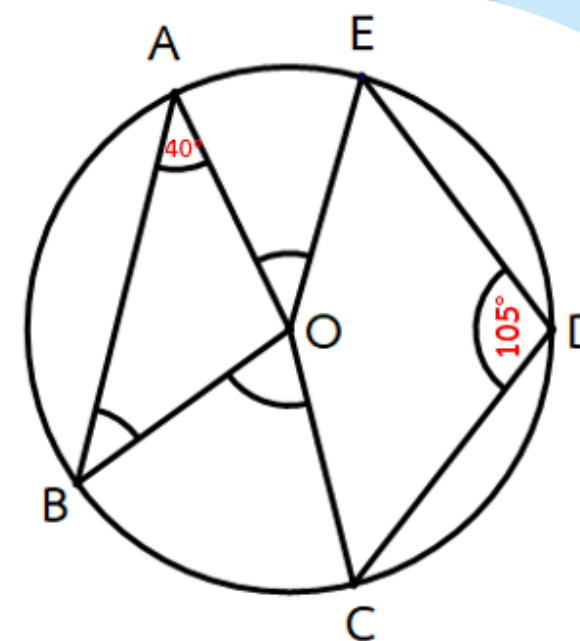
ข้อที่ 5. จากรูป $\widehat{ACB}$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม O $\overline{OD} \parallel \overline{BC}$
และ $\widehat{BAC} = 23^\circ$ จงหาขนาดของ $\widehat{ADO}$



วิธีทำ	เนื่องจาก $\widehat{ACB}$	=	90°	(มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90°)
	จะได้ $\widehat{ABC}$	=	$180 - (90 + 23)$	(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น 180°)
		=	67°	
	เนื่องจาก $\widehat{AOD}$	=	$\widehat{ABC}$	(มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด จะมีขนาดเท่ากัน)
	ดังนั้น $\widehat{AOD}$	=	67°	(สมบัติของการเท่ากัน)
	เนื่องจาก OA	=	OD	(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)
	จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม AOD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว			(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)
	ดังนั้น $\widehat{ADO}$	=	$\widehat{OAD}$	(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)
	$\widehat{ADO}$	=	56.5°	



ข้อที่ 6. จากรูป จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\widehat{BAO} = 40^\circ$
และ $\widehat{CDE} = 105^\circ$ จงหาว่า $\widehat{AOE} + \widehat{BOC}$ เท่ากับกี่องศา



วิธีทำ เนื่องจาก $OA = OB$ (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)
จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม AOB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)
ดังนั้น $\widehat{ABO} = 40^\circ$
นั่นคือ $\widehat{AOB} = 180 - (40 + 40)$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมเป็น 180°)
 $= 100^\circ$
เนื่องจาก มุมกลับ COE $= 2(\widehat{CDE})$ (มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)
 $= 2(105)$
มุมกลับ COE $= 210^\circ$
ดังนั้น $\widehat{AOE} + \widehat{BOC} = 210 - 100$ (มุมกลับ COE $= \widehat{AOE} + \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$)
 $= 110^\circ$



สรุปบทเรียน

ปัญหาทางคณิตศาสตร์บางประเภทสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม ได้แก่ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มุมในครึ่งวงกลมและรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม รวมถึงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทเรขาคณิตอื่น ๆ มาช่วยในการหาคำตอบของปัญหา



บทเรียนครั้งต่อไป

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

คอร์สดวงกลม (1)



สิ่งที่ต้องเตรียม

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

- แบบฝึกหัด 7 : คอร์ดของวงกลม
- วงกลมคู่คิด

