

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค23102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
หน่วยที่ 2 วงกลม

เรื่อง ส่วนประกอบของวงกลม
มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง
ของวงกลม

ครูผู้สอน ครูสรวิรัตน์ เดชะชาติ



ส่วนประกอบของวงกลม
มุมที่จุดศูนย์กลาง
และมุมในส่วนโค้ง
ของวงกลม

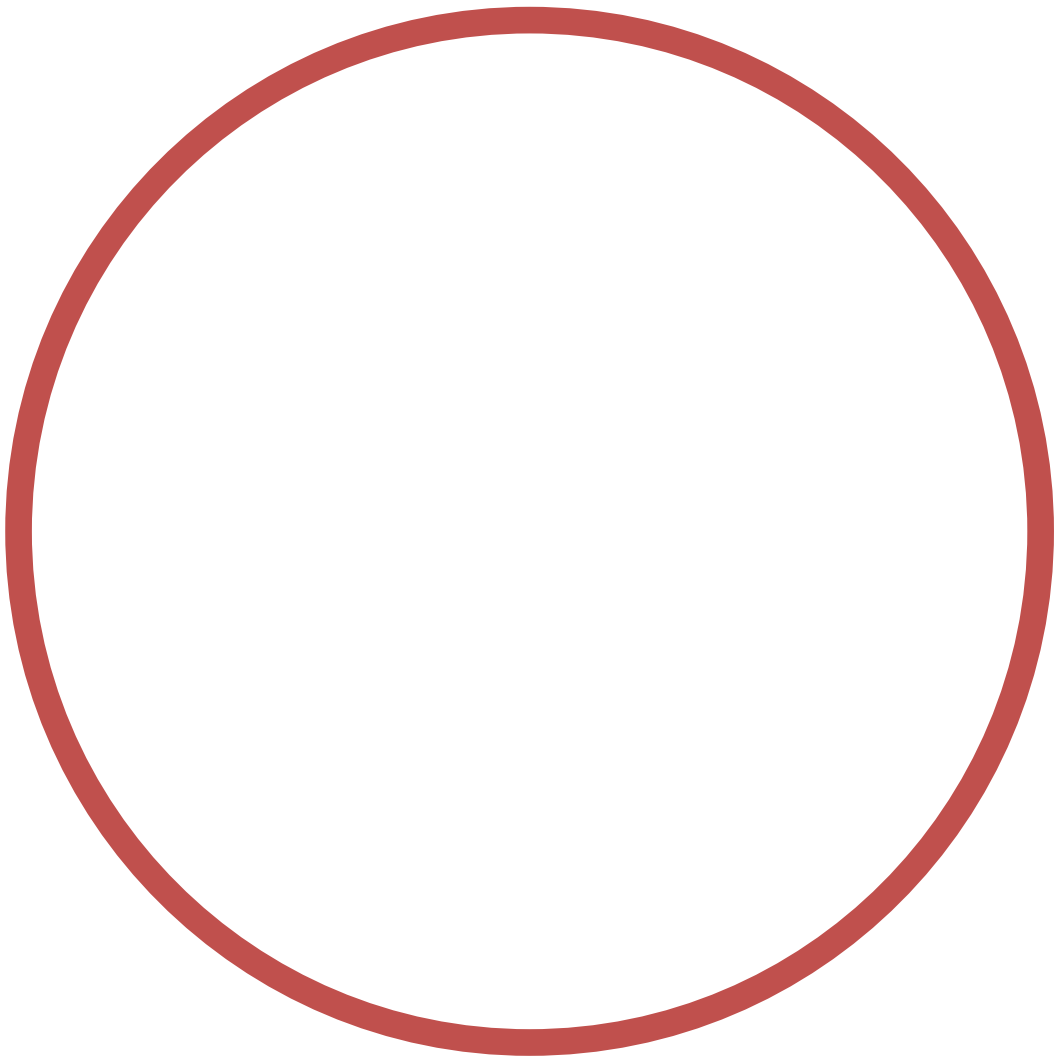


จุดประสงค์การเรียนรู้



1. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของครึ่งวงกลม ส่วนโค้งใหญ่ ส่วนโค้งน้อย มุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งของวงกลม และมุมในครึ่งวงกลม
2. นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุม ที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลม ไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์





วงกลม

วงกลมเป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบ ที่แต่ละจุด
บนรูปเรขาคณิตนี้อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง

บนระนาบเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่นี้ว่า จุดศูนย์กลาง
ของวงกลม และเรียกระยะที่เท่ากันนี้ว่า รัศมีของวงกลม

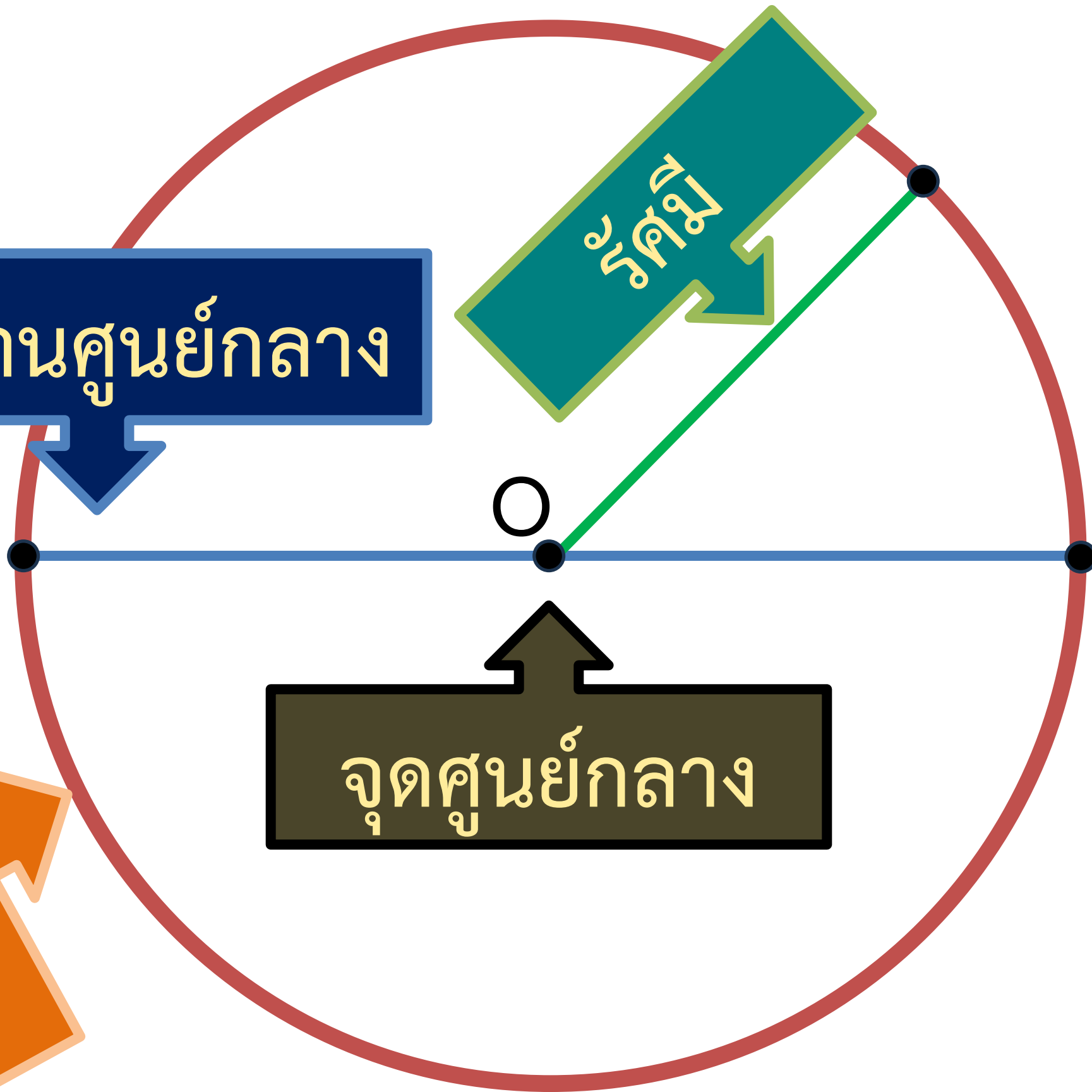


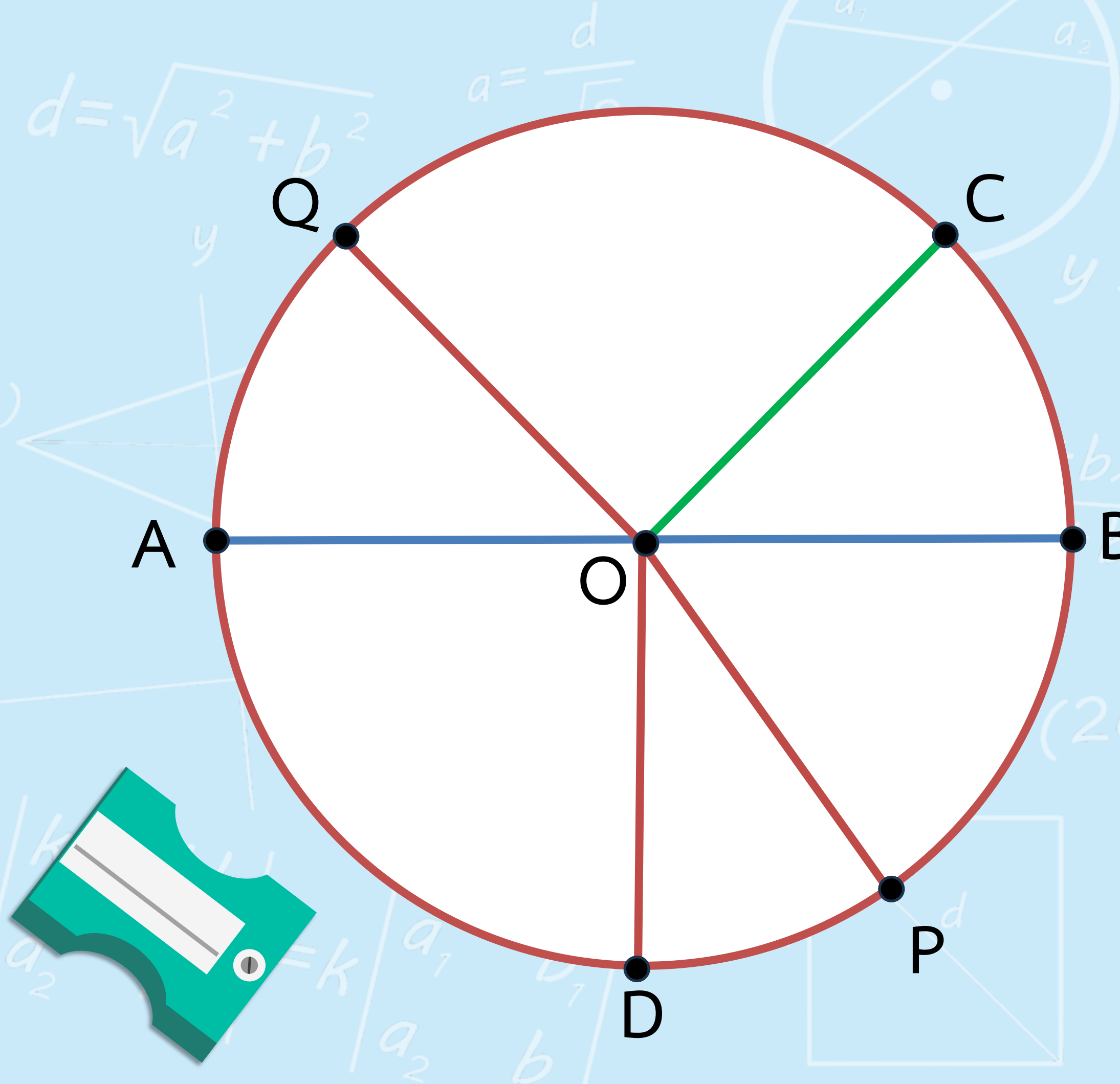
เส้นผ่านศูนย์กลาง

รัศมี

เส้นรอบวง

จุดศูนย์กลาง



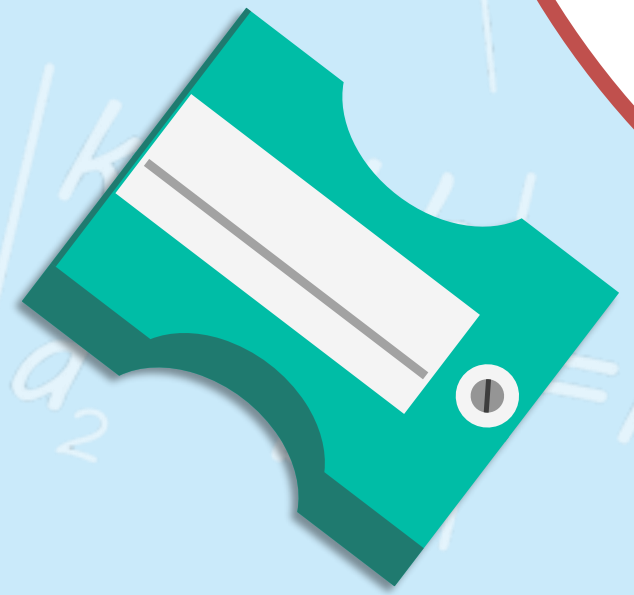


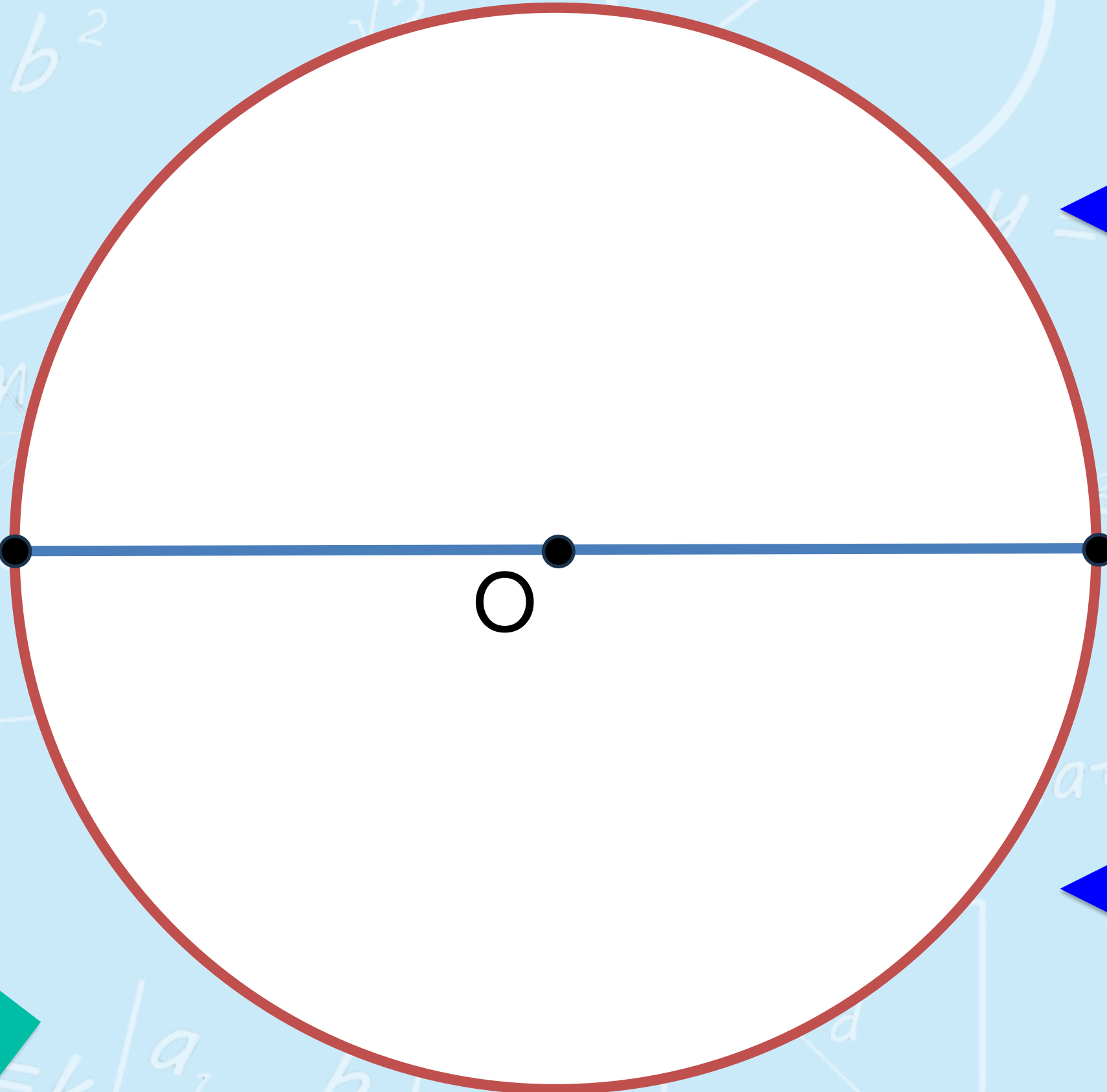
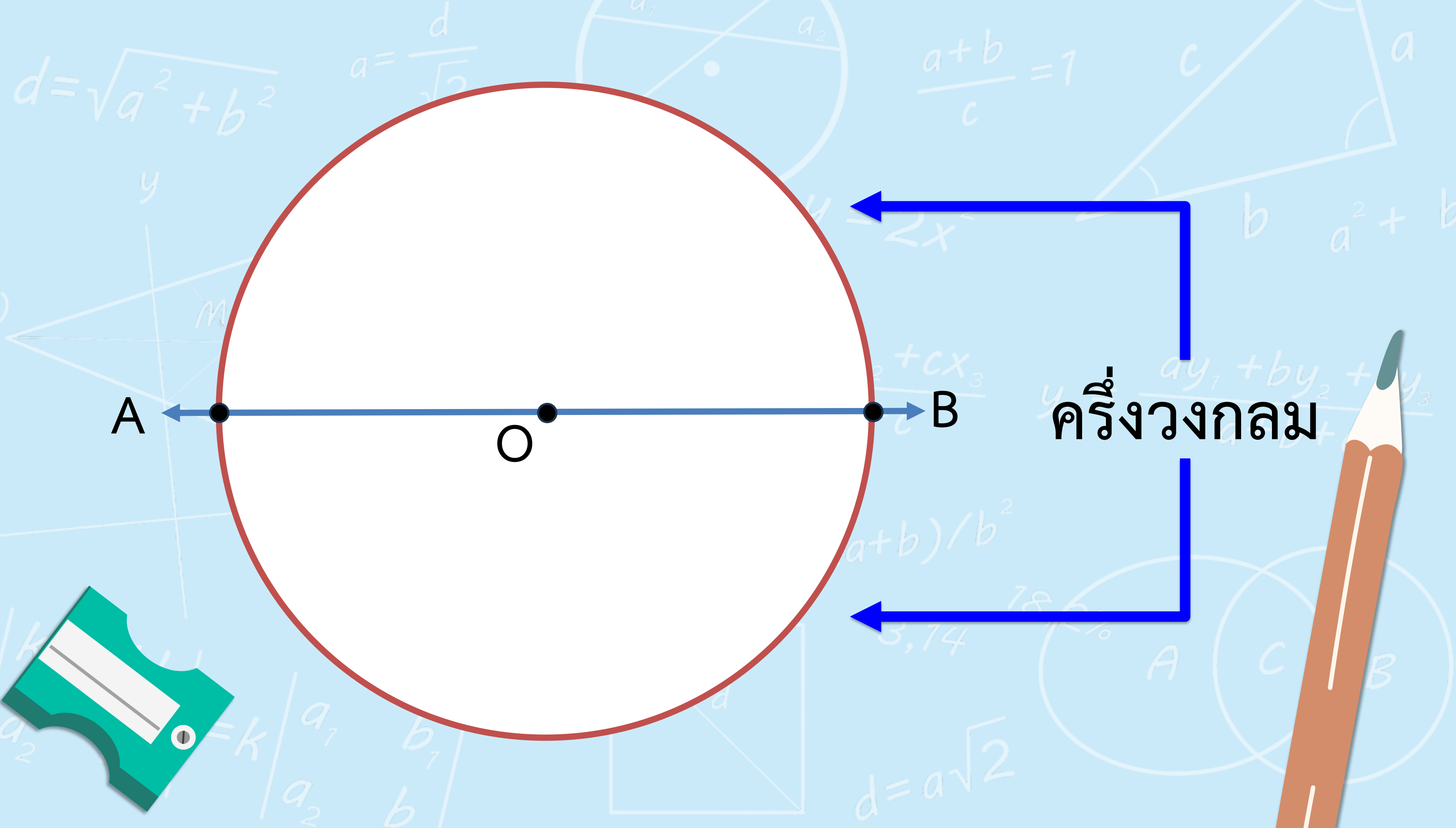
เรานิยมเรียกชื่อวงกลมที่มีจุด O
เป็นจุดศูนย์กลางว่า

วงกลม O

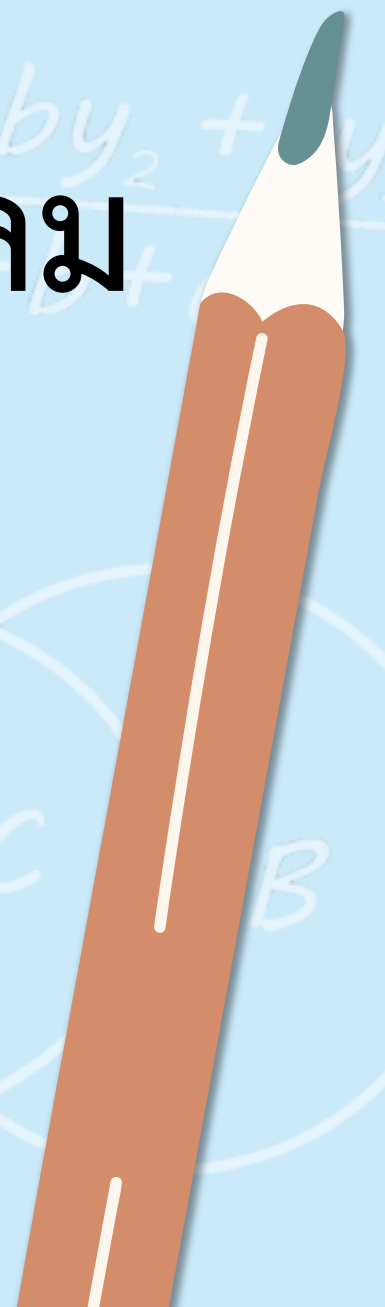
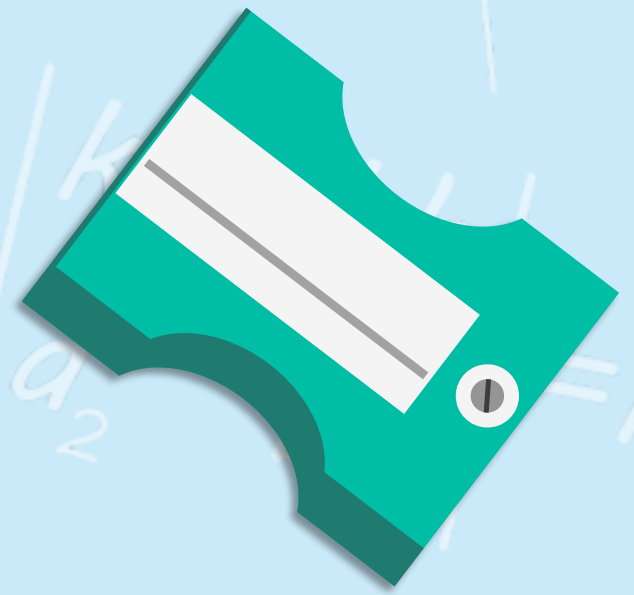
รัศมีของวงกลม O มีอะไรบ้าง

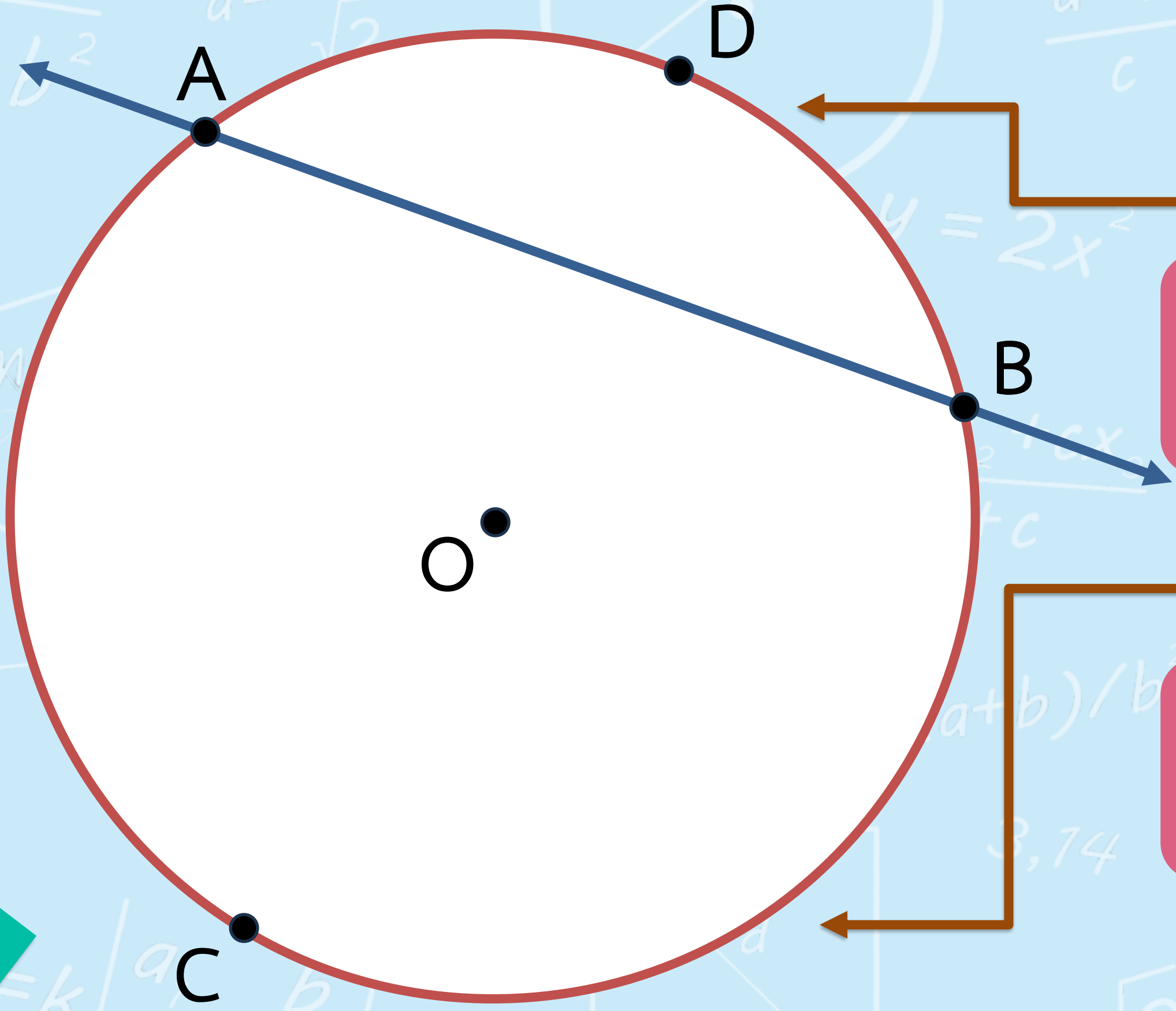
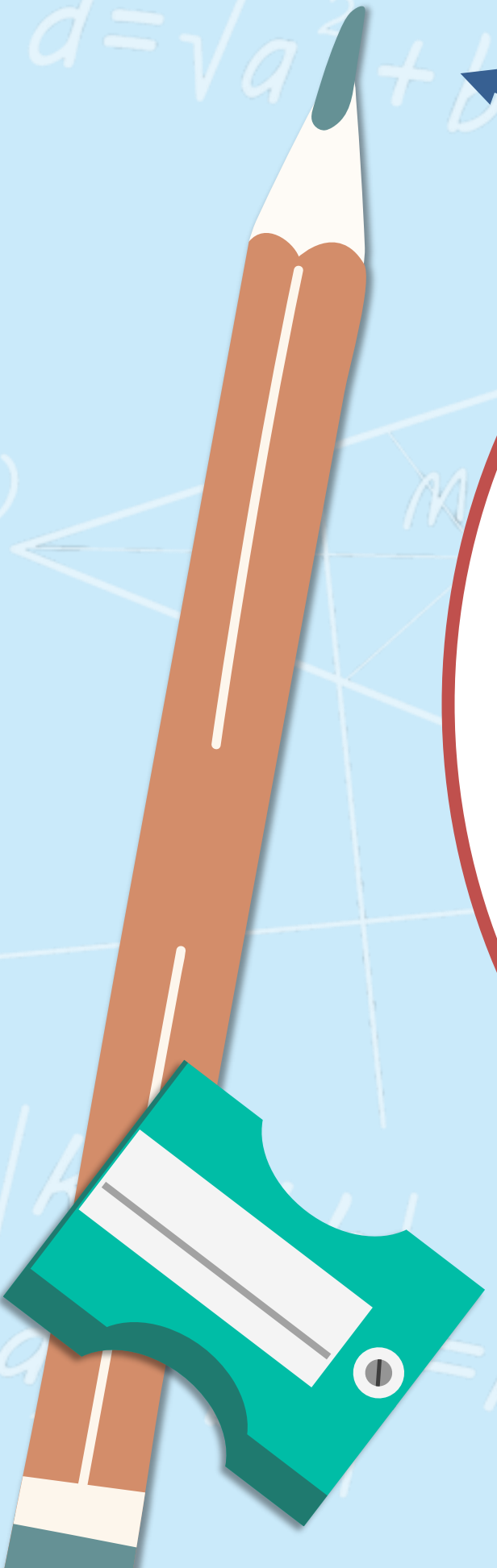
- รัศมี OC
- รัศมี OD
- รัศมี OA
- รัศมี OB
- รัศมี OP
- และรัศมี OQ





ครึ่งวงกลม



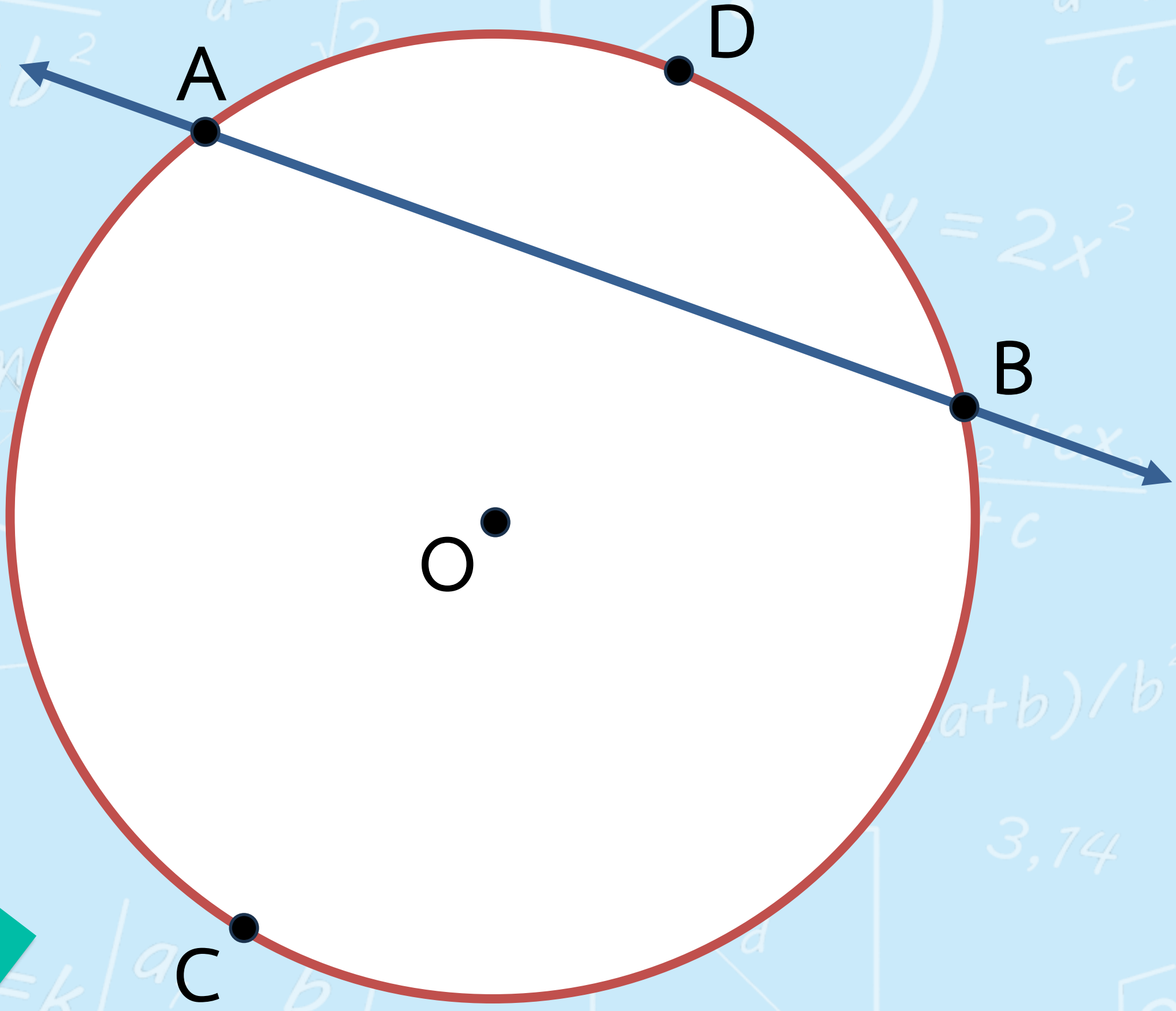
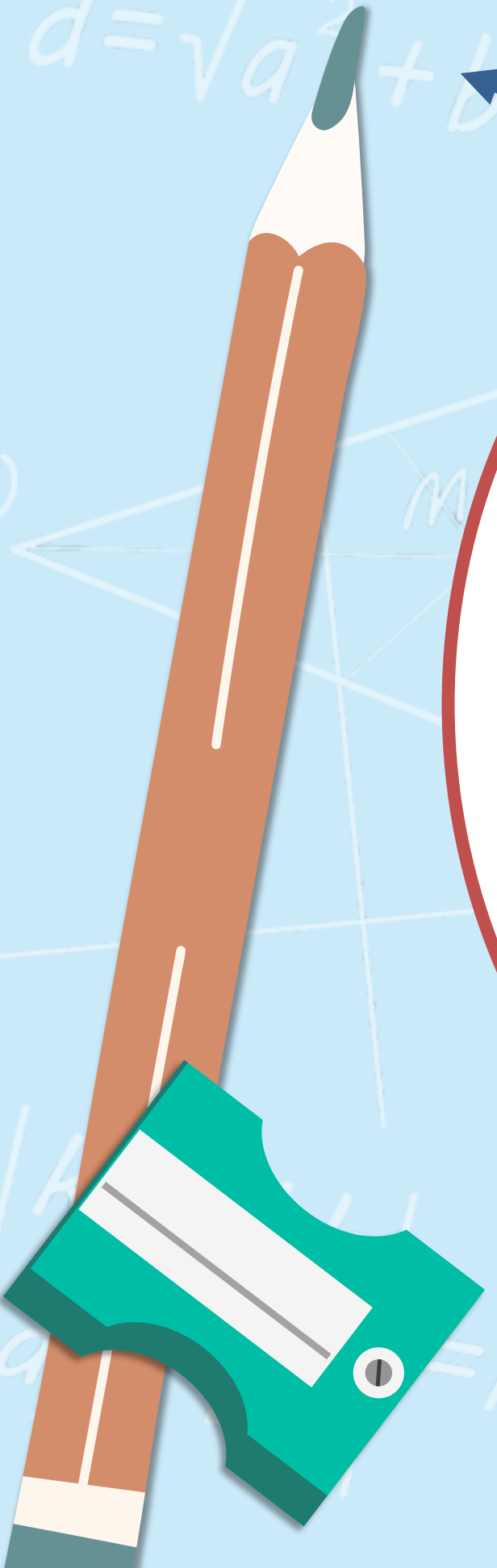


ส่วนโค้งน้อย

ส่วนโค้งน้อย AB
เขียนแทนด้วย $\widehat{ADB}$

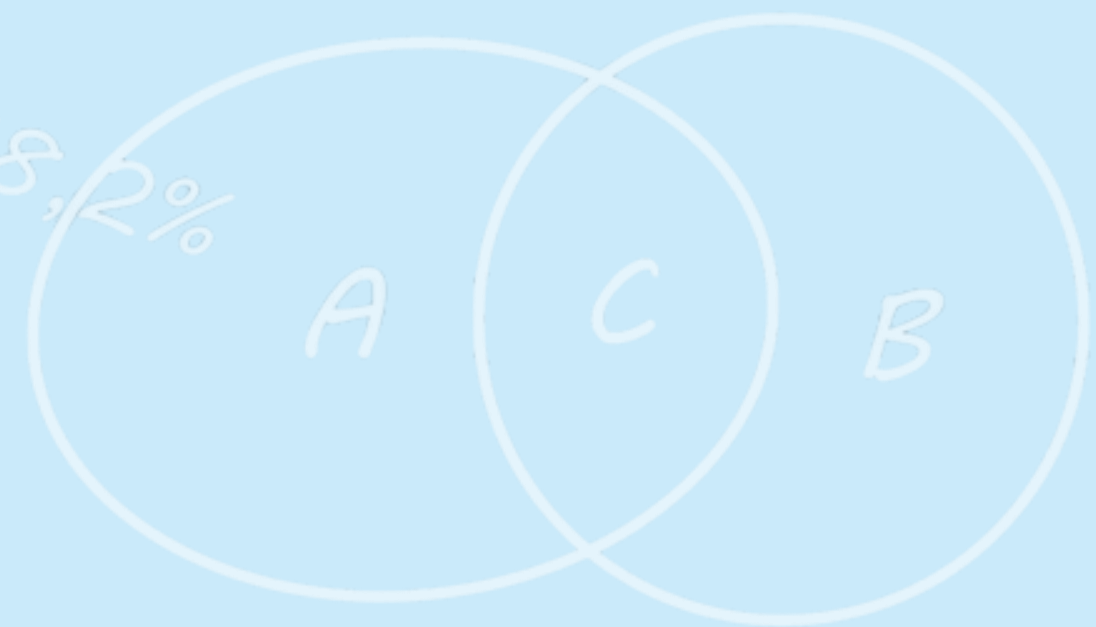
ส่วนโค้งใหญ่

ส่วนโค้งใหญ่ AB
เขียนแทนด้วย $\widehat{ACB}$



ส่วนโค้ง AB

ส่วนโค้งน้อย AB
เขียนแทนด้วย $\widehat{AB}$



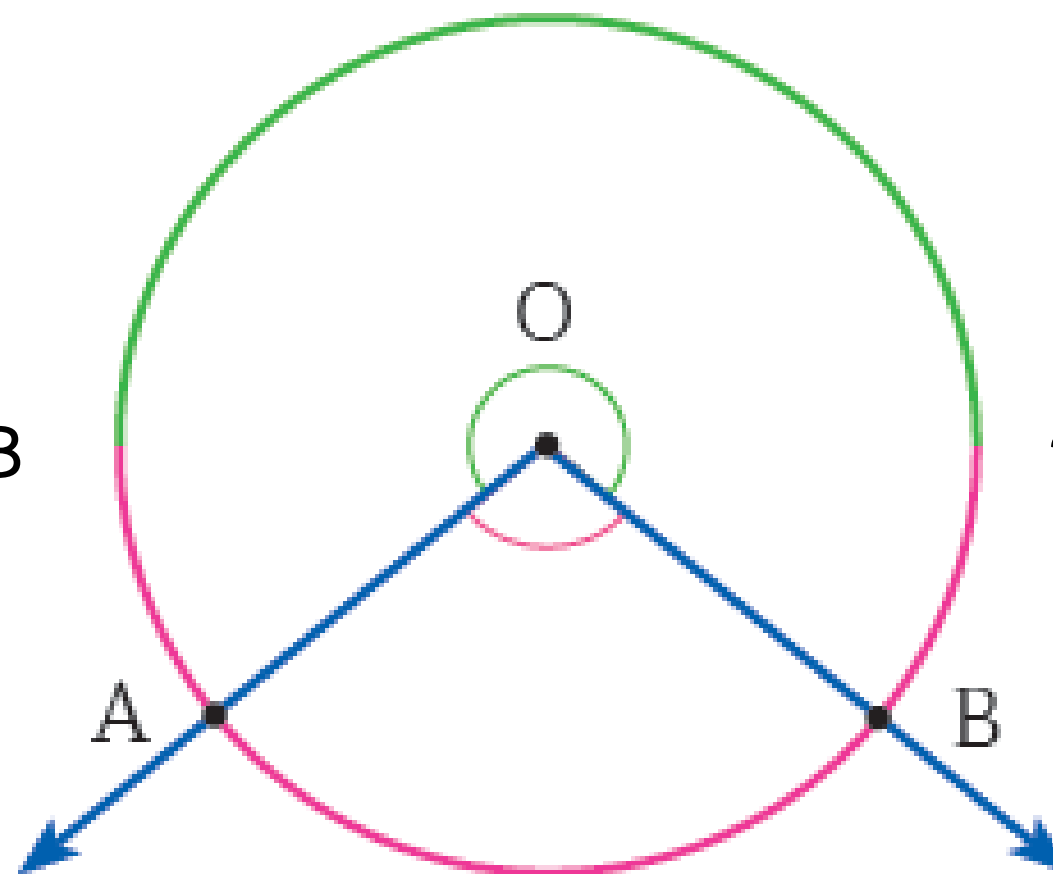
มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

คือ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม



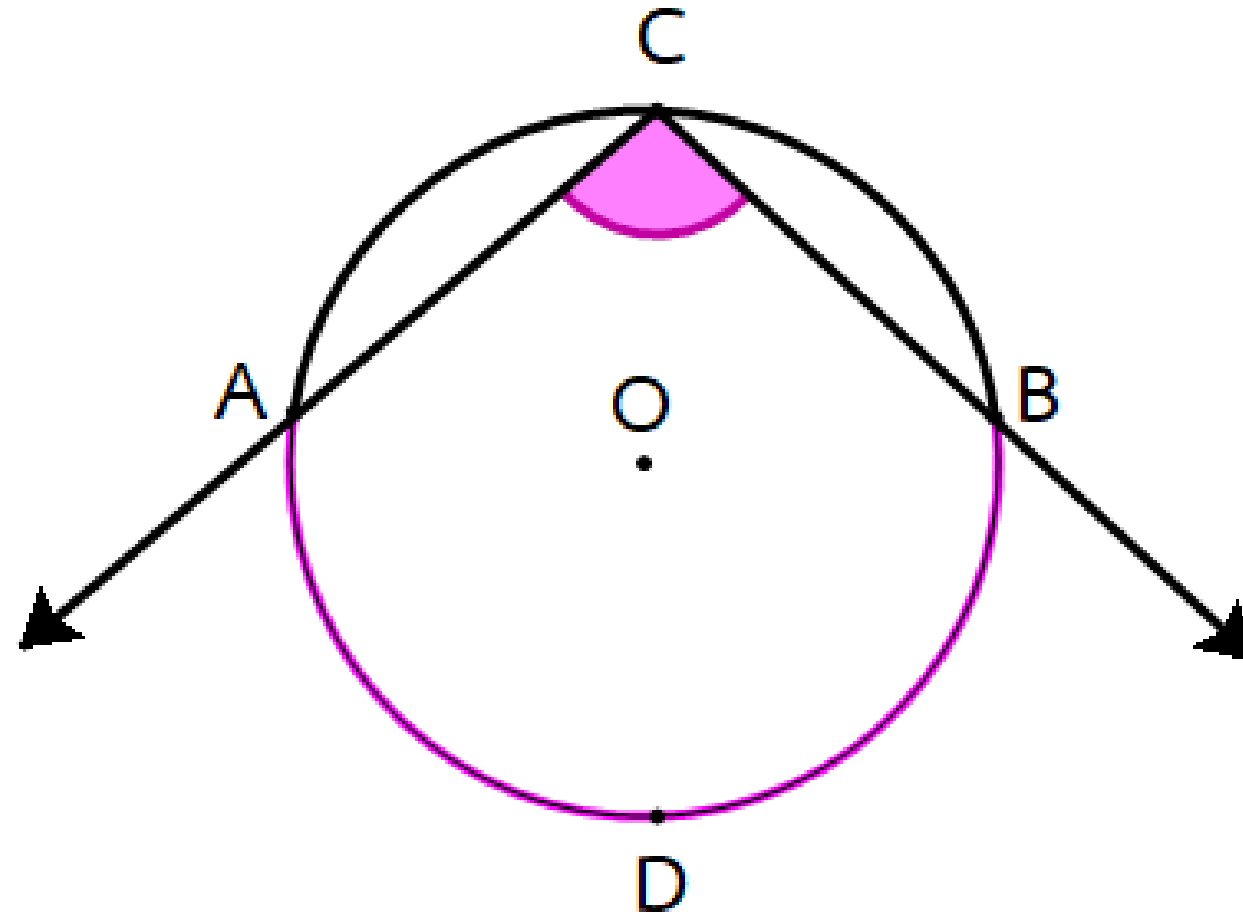
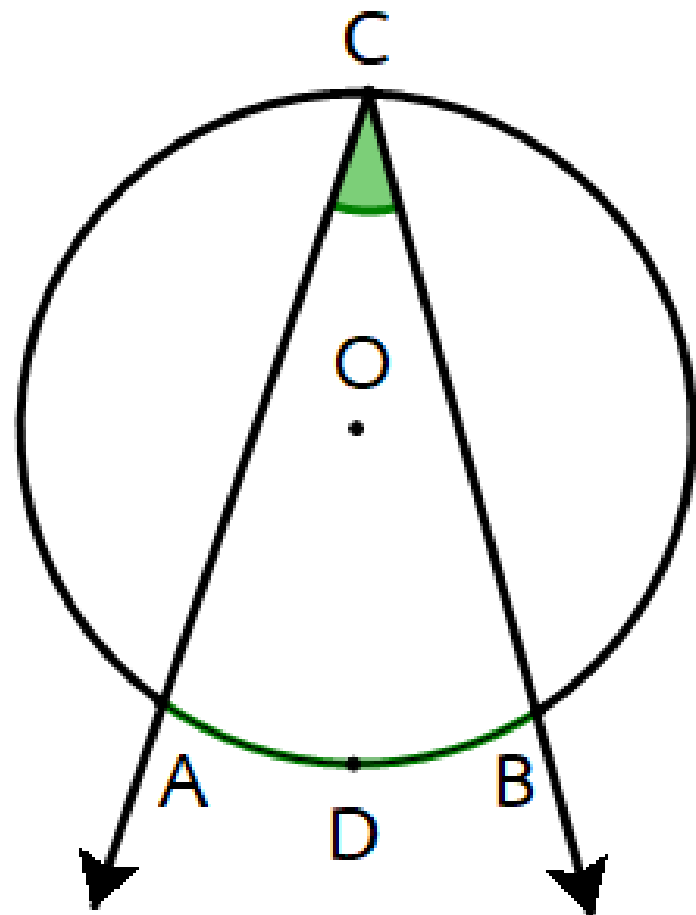
มุม AOB
รองรับตัวส่วนโค้งน้อย AB



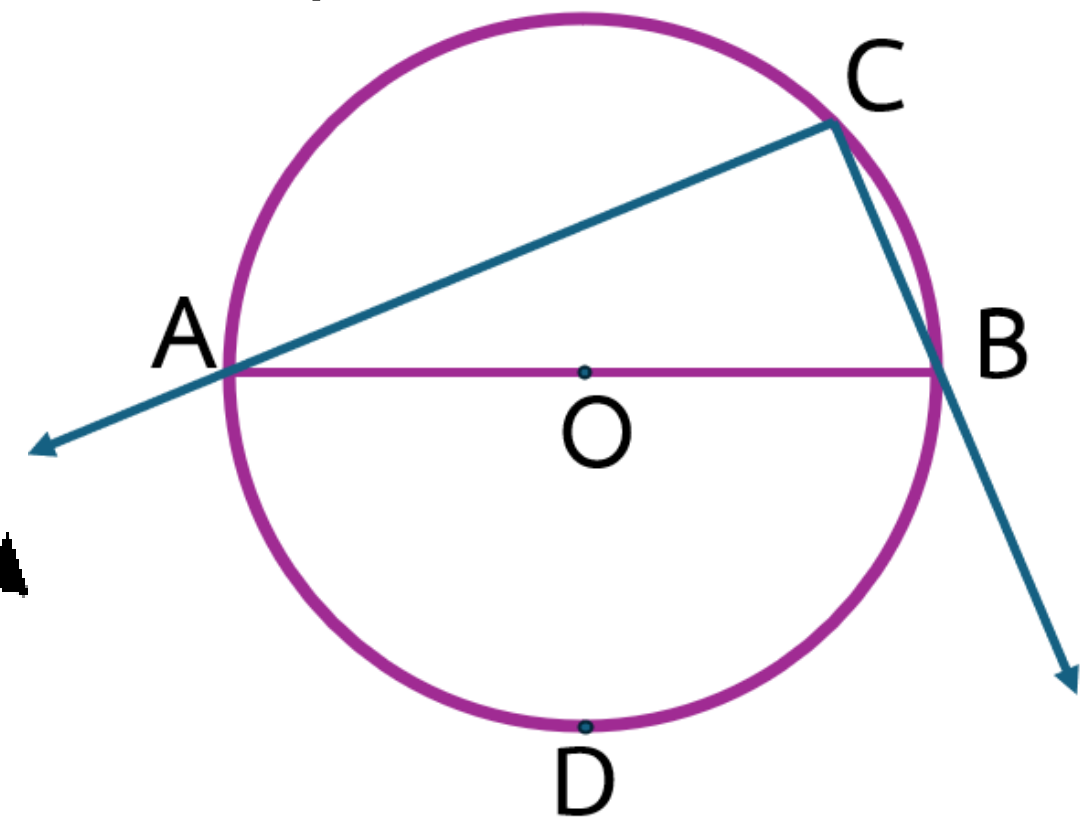
มุมกลับ AOB
รองรับตัวส่วนโค้งใหญ่ AB

มุมในส่วนโค้งของวงกลม

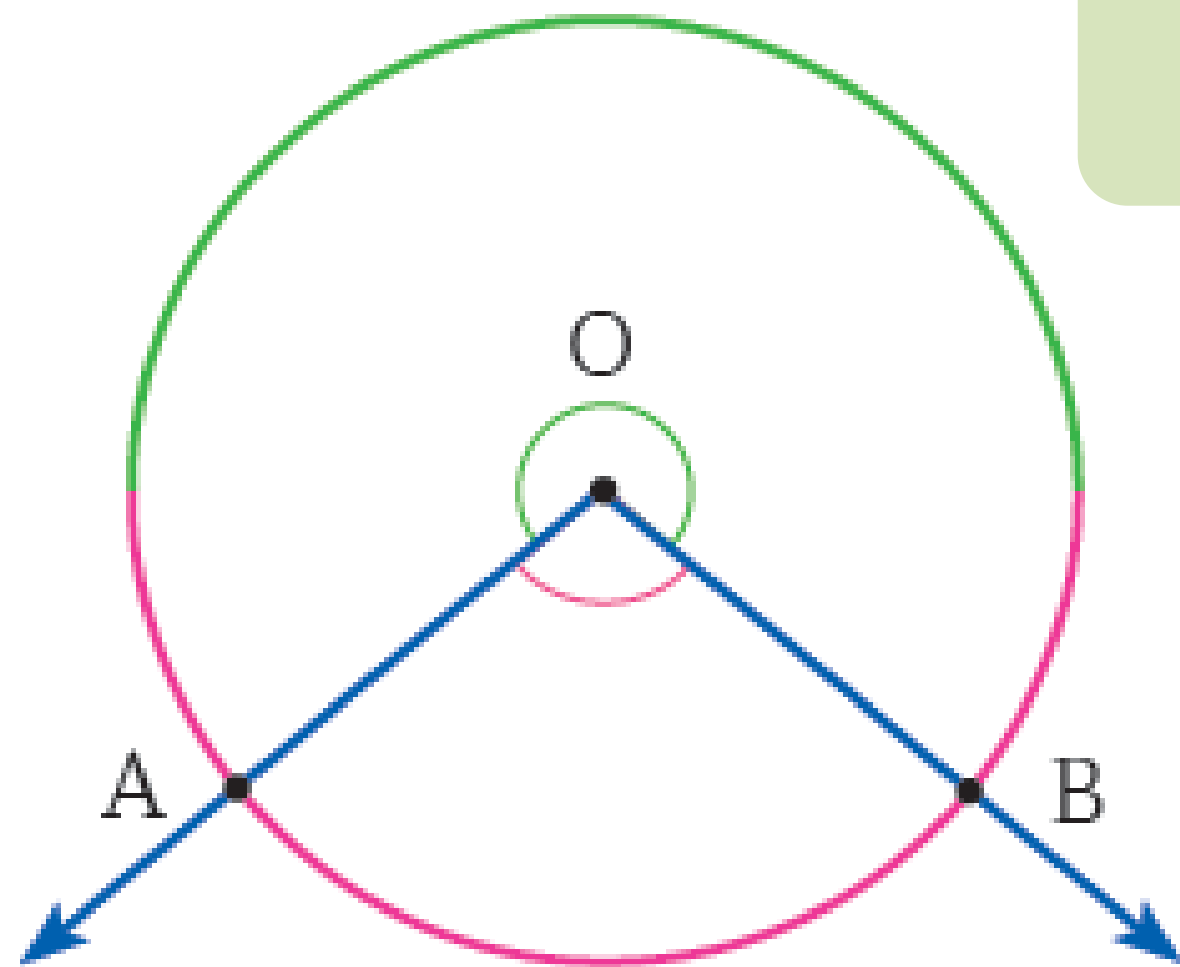
มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม คือ มุมในส่วนโค้งของวงกลม



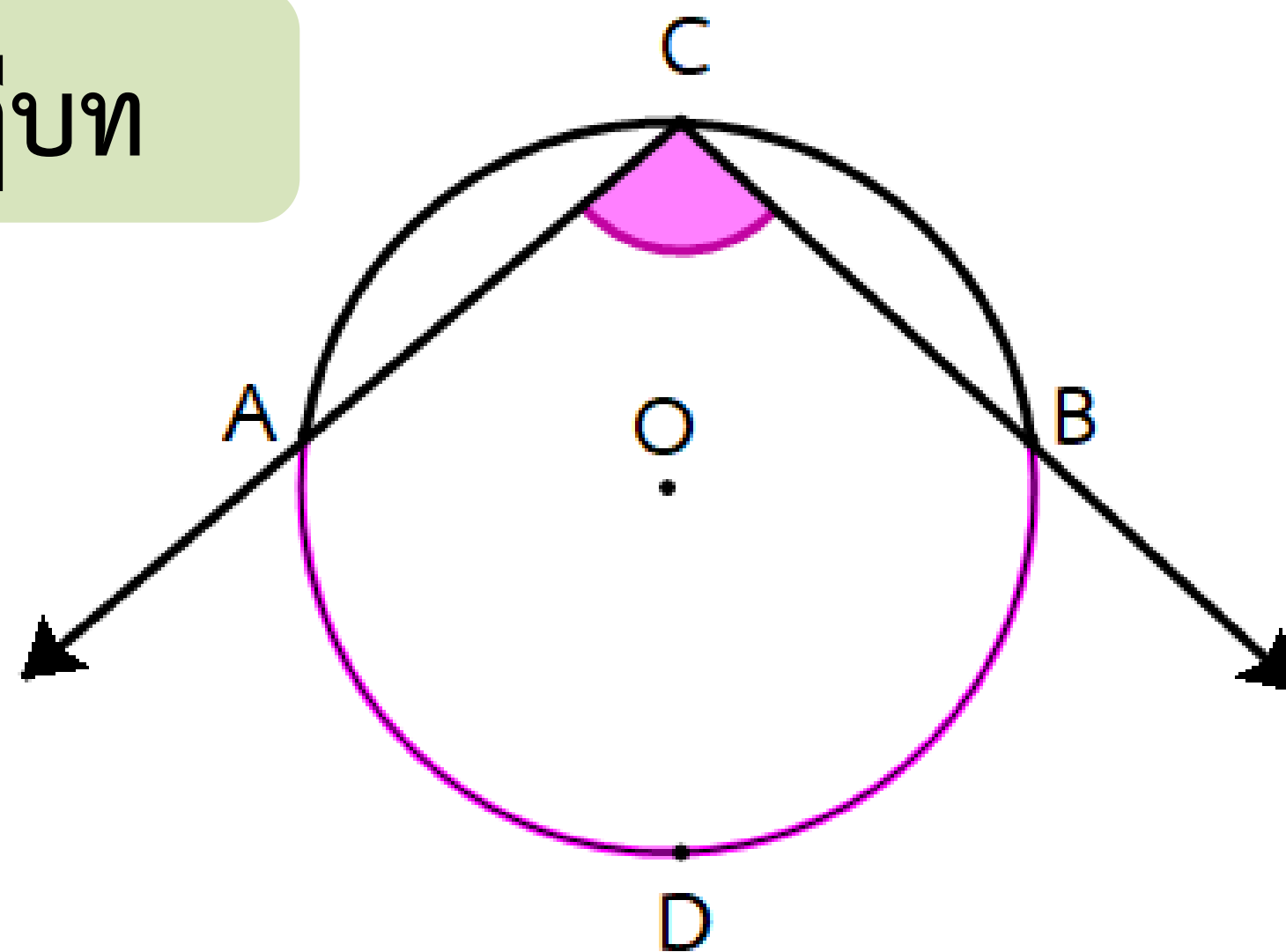
มุมในครึ่งวงกลม



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม



มุมในส่วนโค้งของวงกลม



ทฤษฎีบท

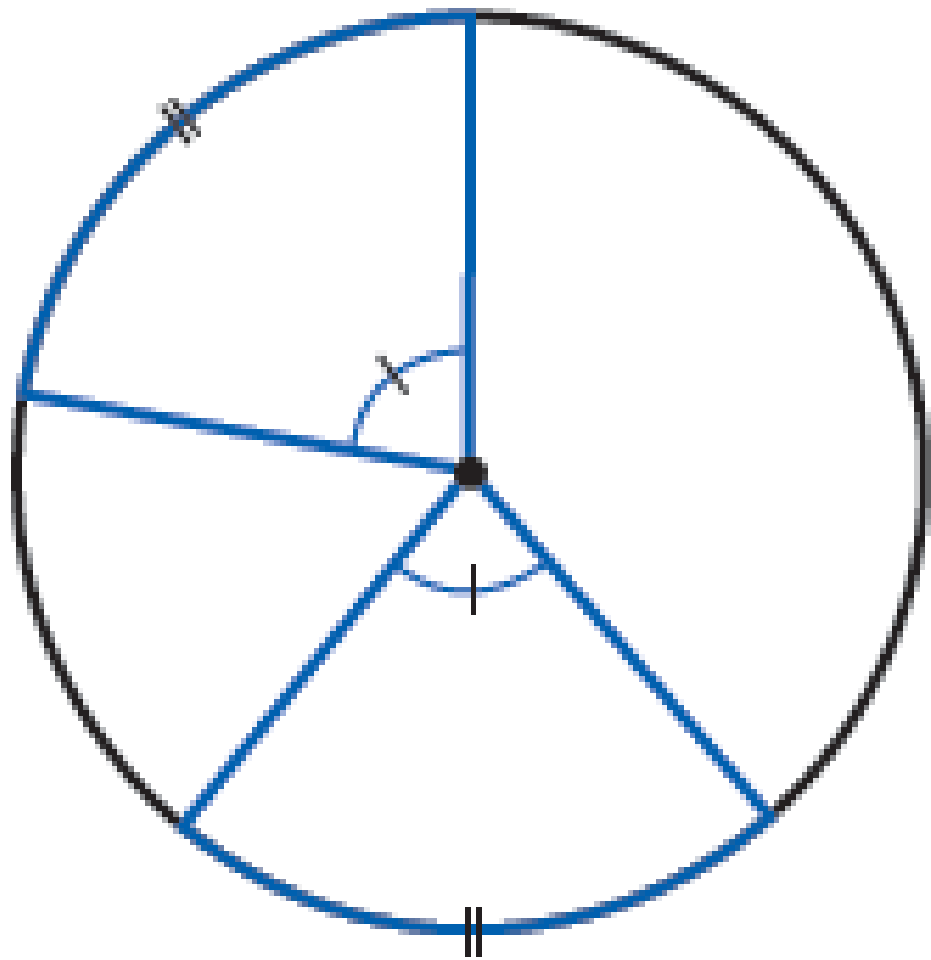


วงกลม



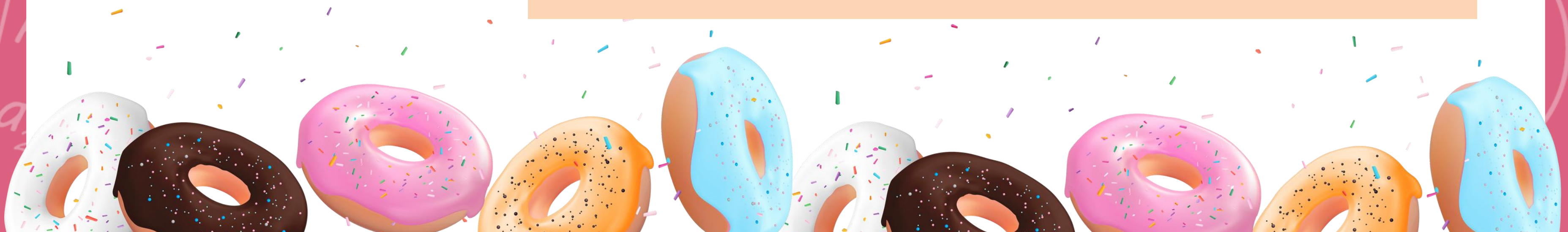
คู่คิด

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลาง



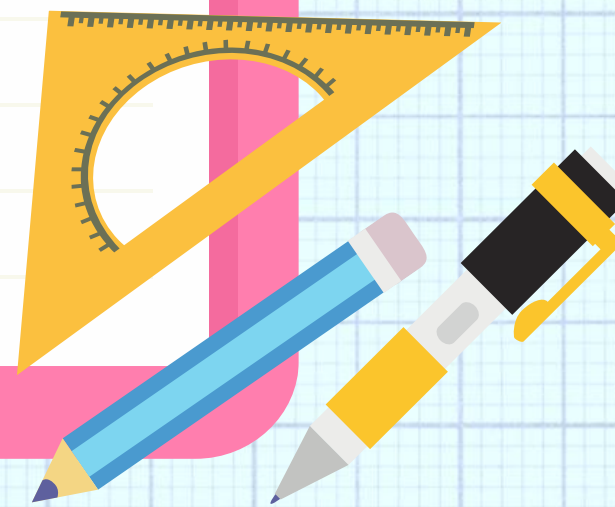
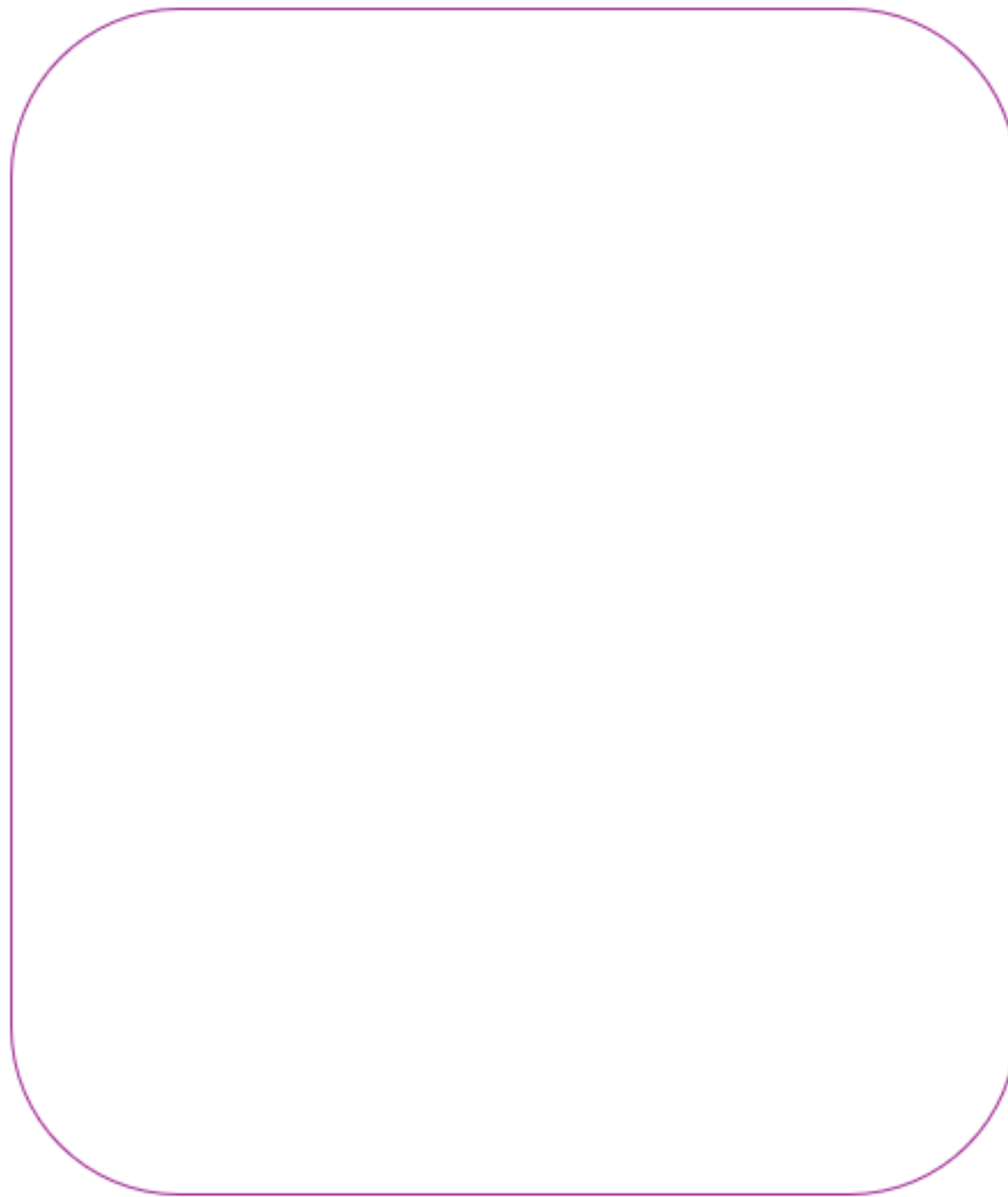
ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น จะยาวเท่ากัน

ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



ใบกิจกรรม 1 : สำรวจมุมในวงกลม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. ให้นักเรียนสร้างวงกลม 1 วง พร้อมวาดมุมในส่วนโค้งของวงกลมให้เป็นมุมที่เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 180 องศา และวาดมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งของมุมในส่วนโค้งเดียวกัน โดยไม่ให้แขนของมุมตัดกัน จากนั้นวัดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมและบันทึกค่า



ใบกิจกรรม 1

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

สำรวจมุมในวงกลม

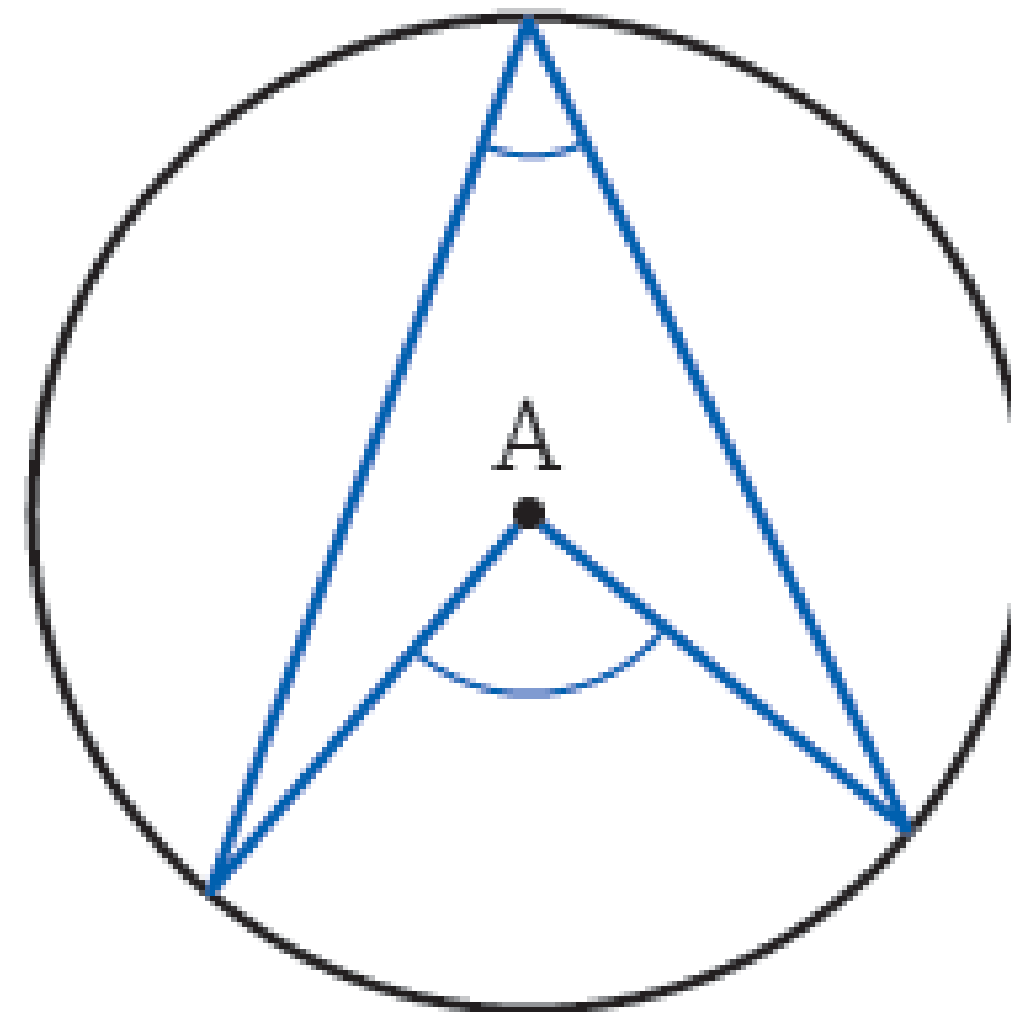




ขั้นตอนการทำกิจกรรม



1) ให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มวาดวงกลมที่มีขนาดแตกต่างกัน 5 วง และตั้งชื่อวงกลมว่าวงกลม A, B, C, D และ E ตามลำดับสมาชิกในกลุ่ม จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนวาดมุมในส่วนโค้งให้เป็นมุมที่เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 180 องศา และมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งของมุมในส่วนโค้งเดียวกันโดยไม่ให้แขนของมุมตัดกัน ตัวอย่างดังรูป

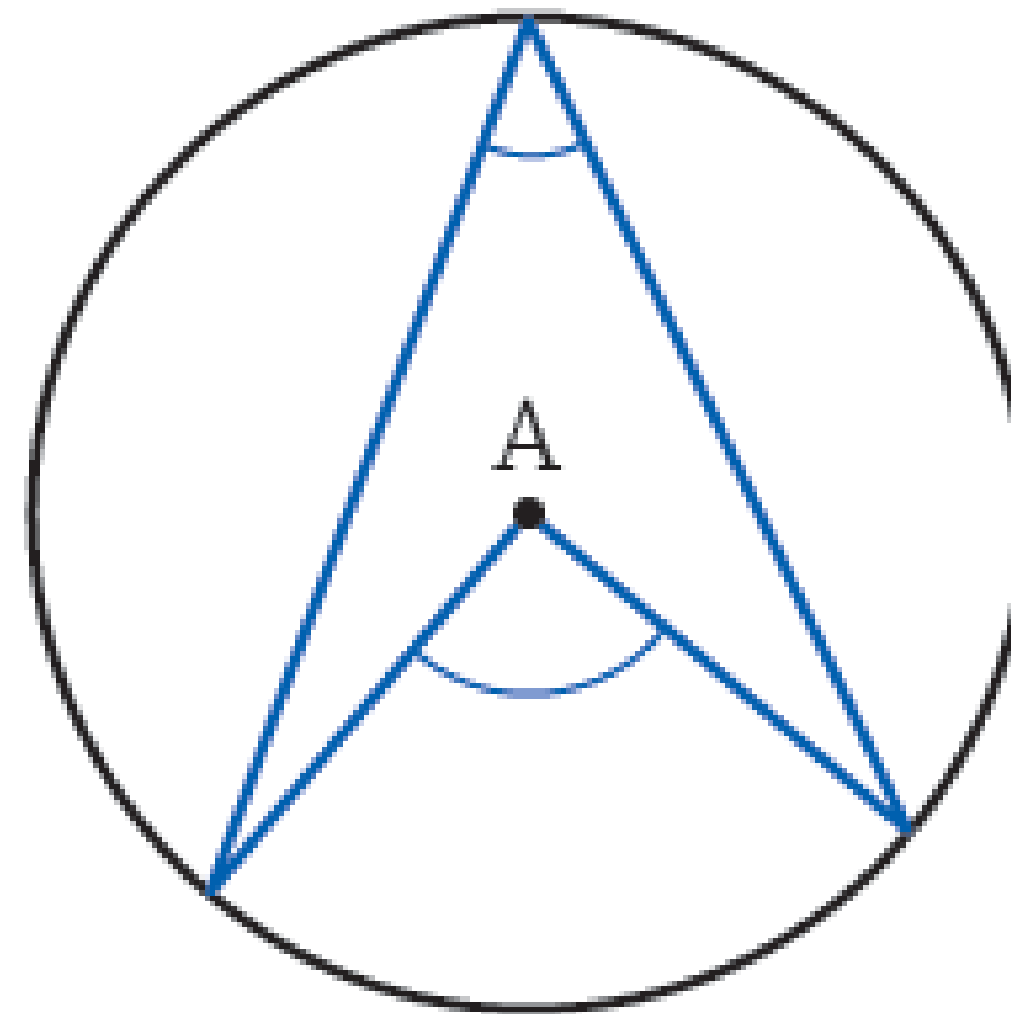




ขั้นตอนการทำกิจกรรม



1) ให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มวาดวงกลมที่มีขนาดแตกต่างกัน 5 วง และตั้งชื่อวงกลมว่าวงกลม A, B, C, D และ E ตามลำดับสมาชิกในกลุ่ม จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนวาดมุมในส่วนโค้งให้เป็นมุมที่เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 180 องศา และมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งของมุมในส่วนโค้งเดียวกันโดยไม่ให้แขนของมุมตัดกัน ตัวอย่างดังรูป



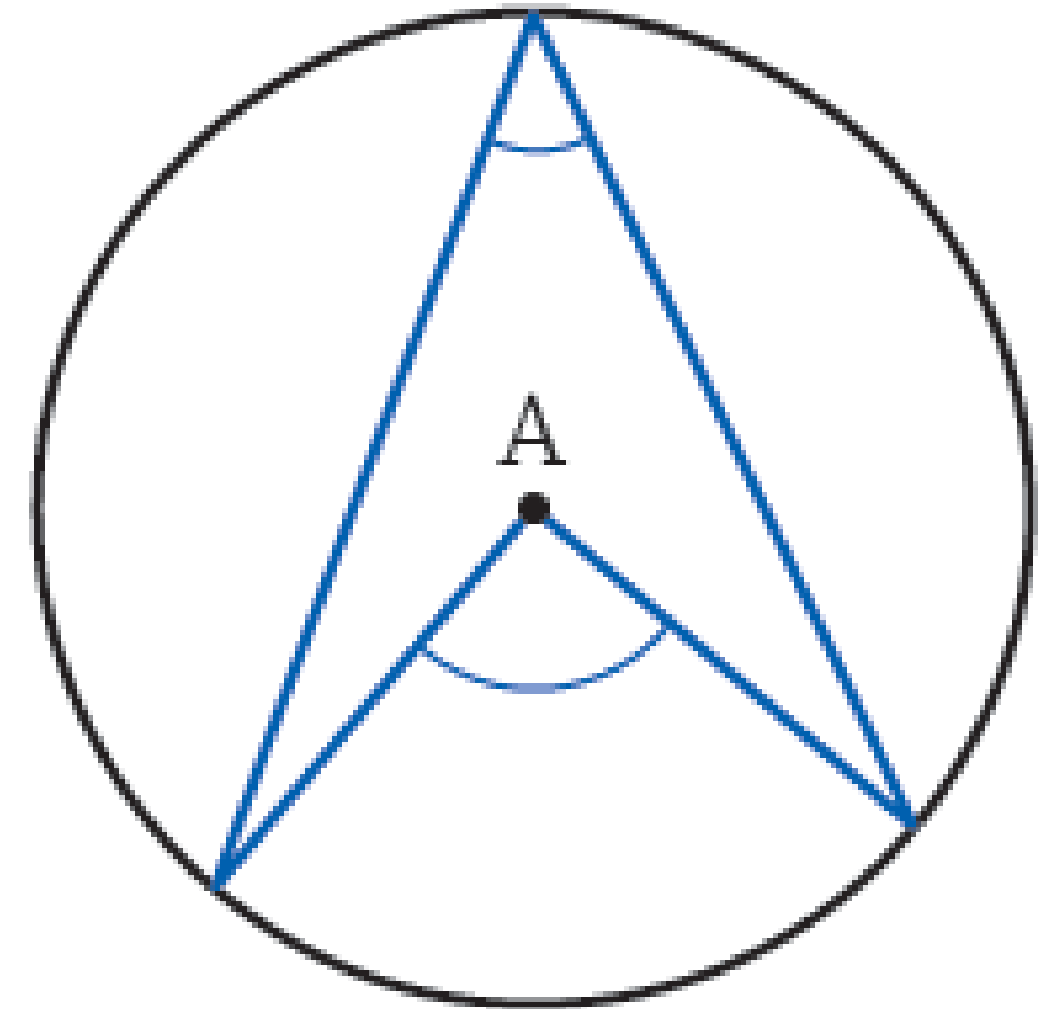


ขั้นตอนการทำกิจกรรม



2) ให้นักเรียนบันทึกขนาดของมุมต่าง ๆ ที่วัดได้
ของตนเองและเพื่อนในกลุ่มลงในตาราง

วงกลม	ขนาดของมุมในส่วนโค้ง	ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง
A		
B		
C		
D		
E		





ขั้นตอนการทำกิจกรรม



3) ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมกับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

.....
.....
.....
.....
.....

วงกลม	ขนาดของมุมในส่วนโค้ง	ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง
A		
B		
C		
D		
E		



ขั้นตอนการทำกิจกรรม



วงกลม	ขนาดของมุมในส่วนโค้ง	ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง
A		
B		
C		
D		
E		

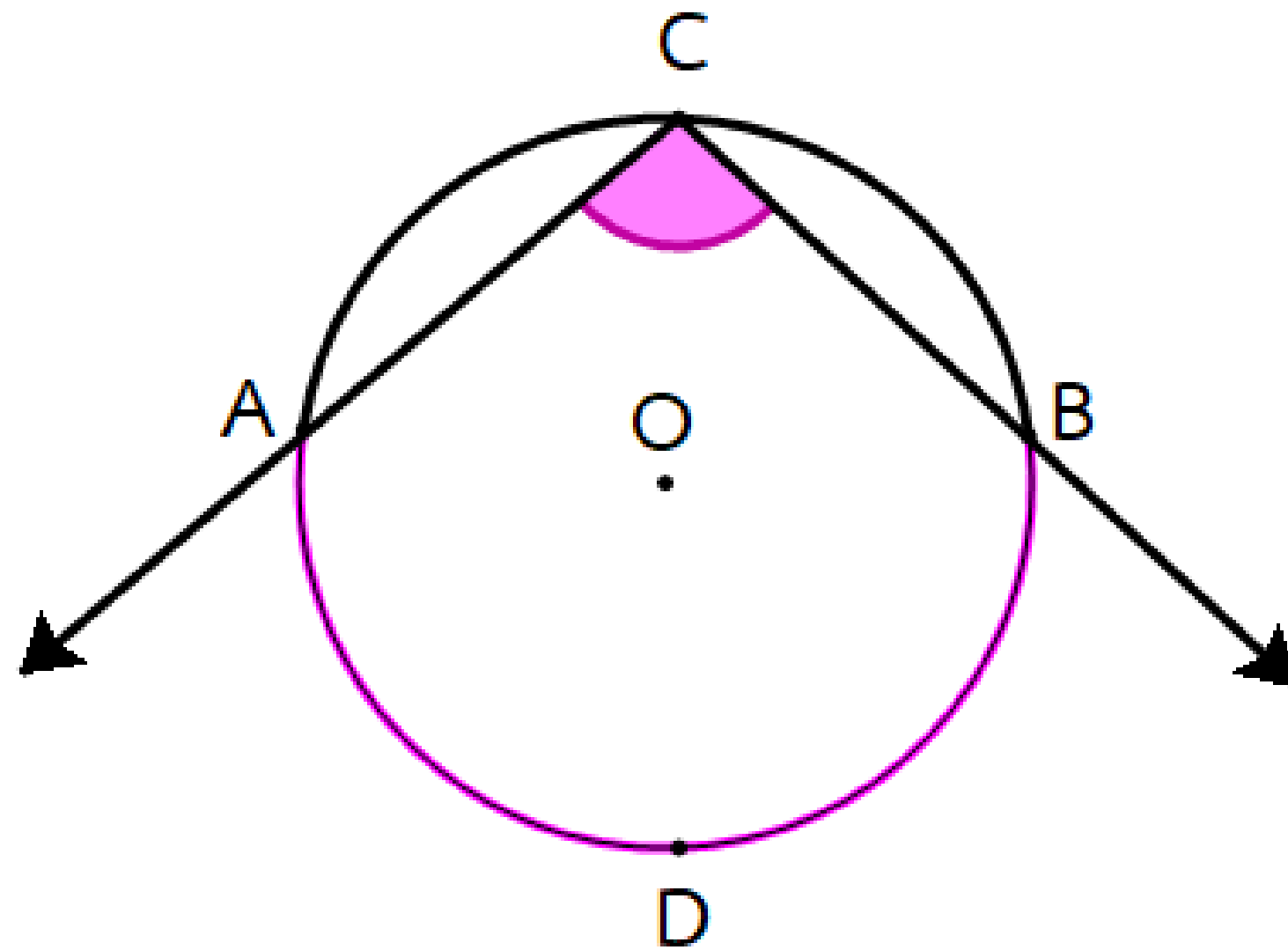
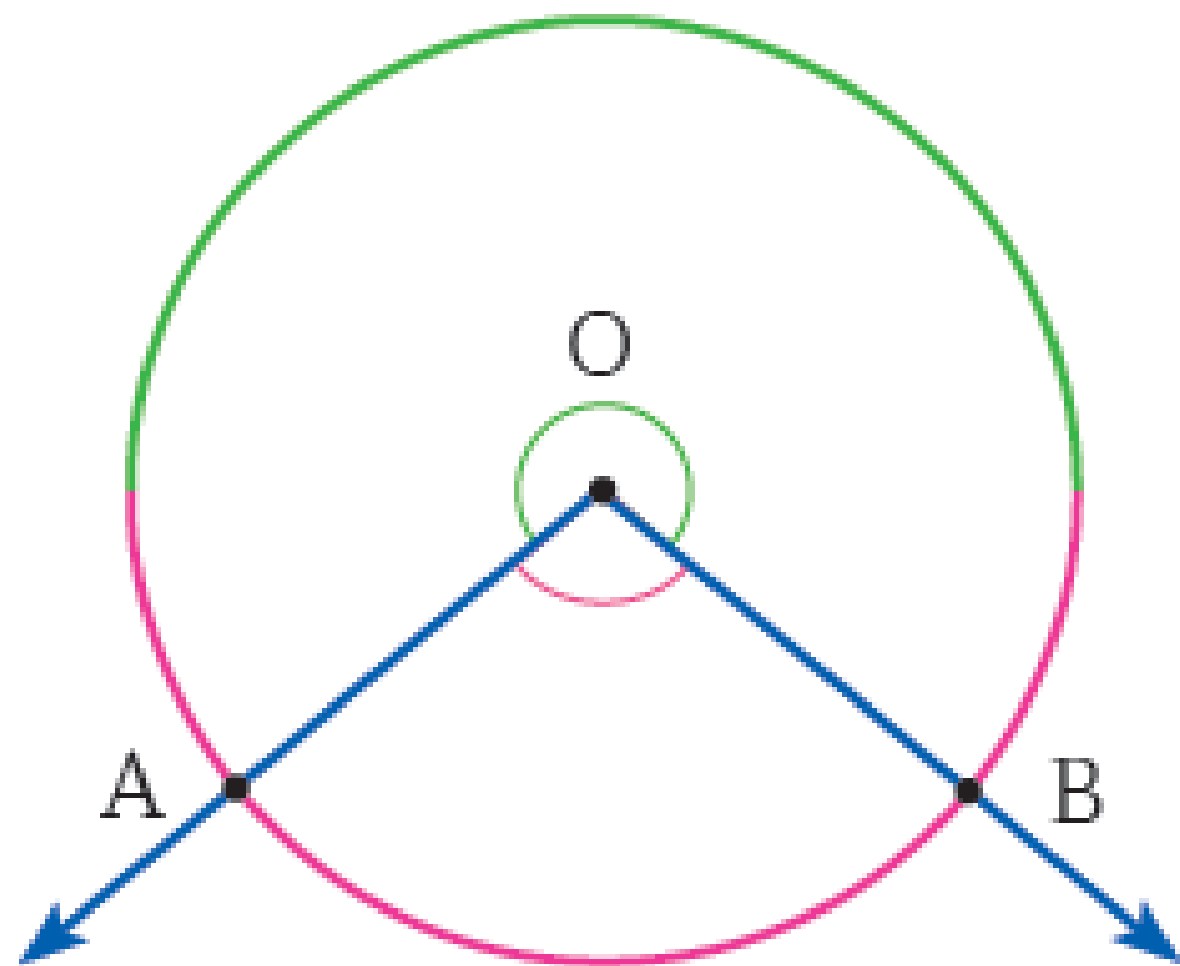
ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง
จะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง
ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้ง
ของวงกลมจะมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่ง
ของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วย
ส่วนโค้งเดียวกัน

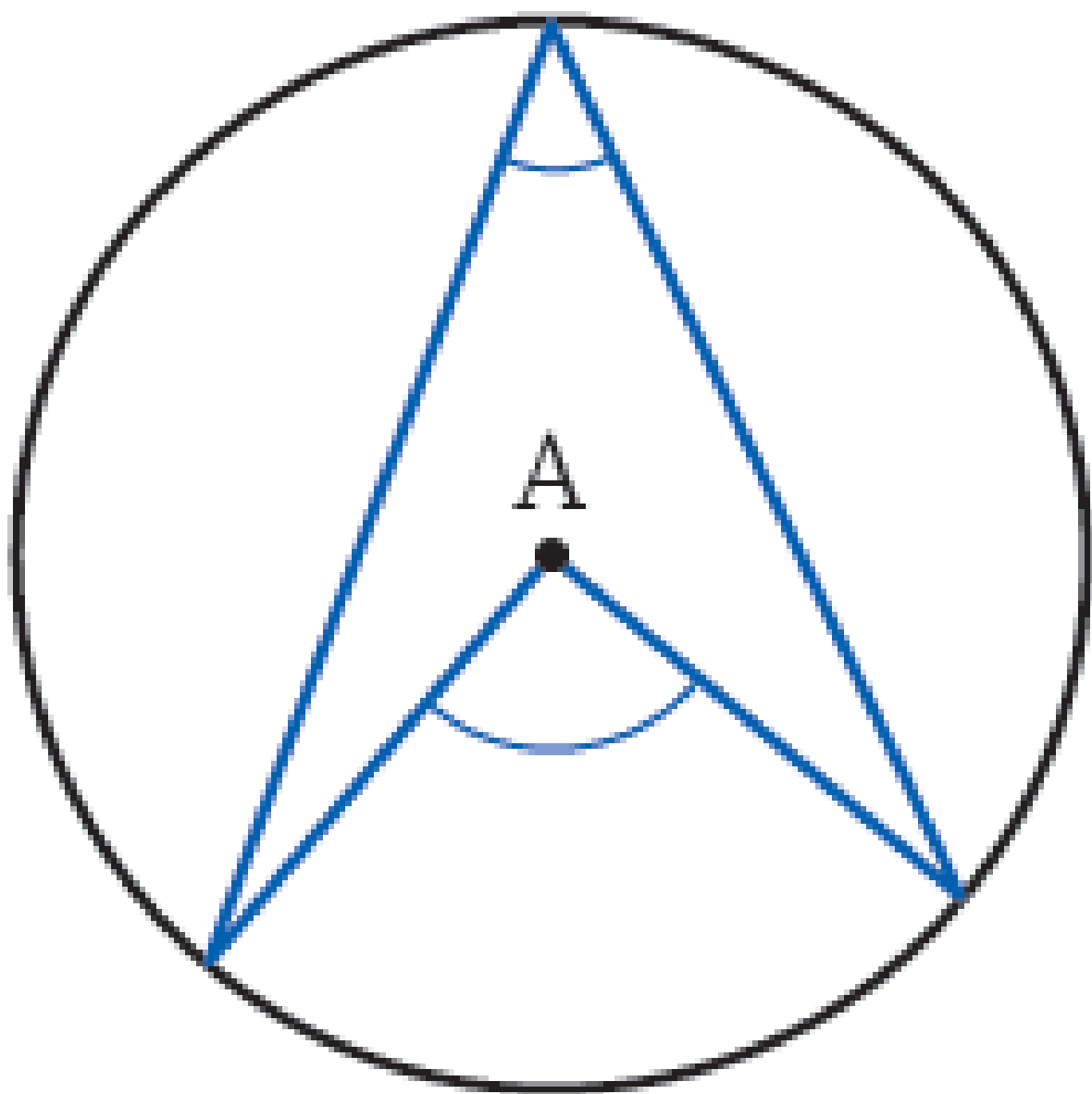
ความสัมพันธ์ระหว่าง

มุมที่จุดศูนย์กลางกลางของวงกลม

มุมในส่วนโค้งของวงกลม



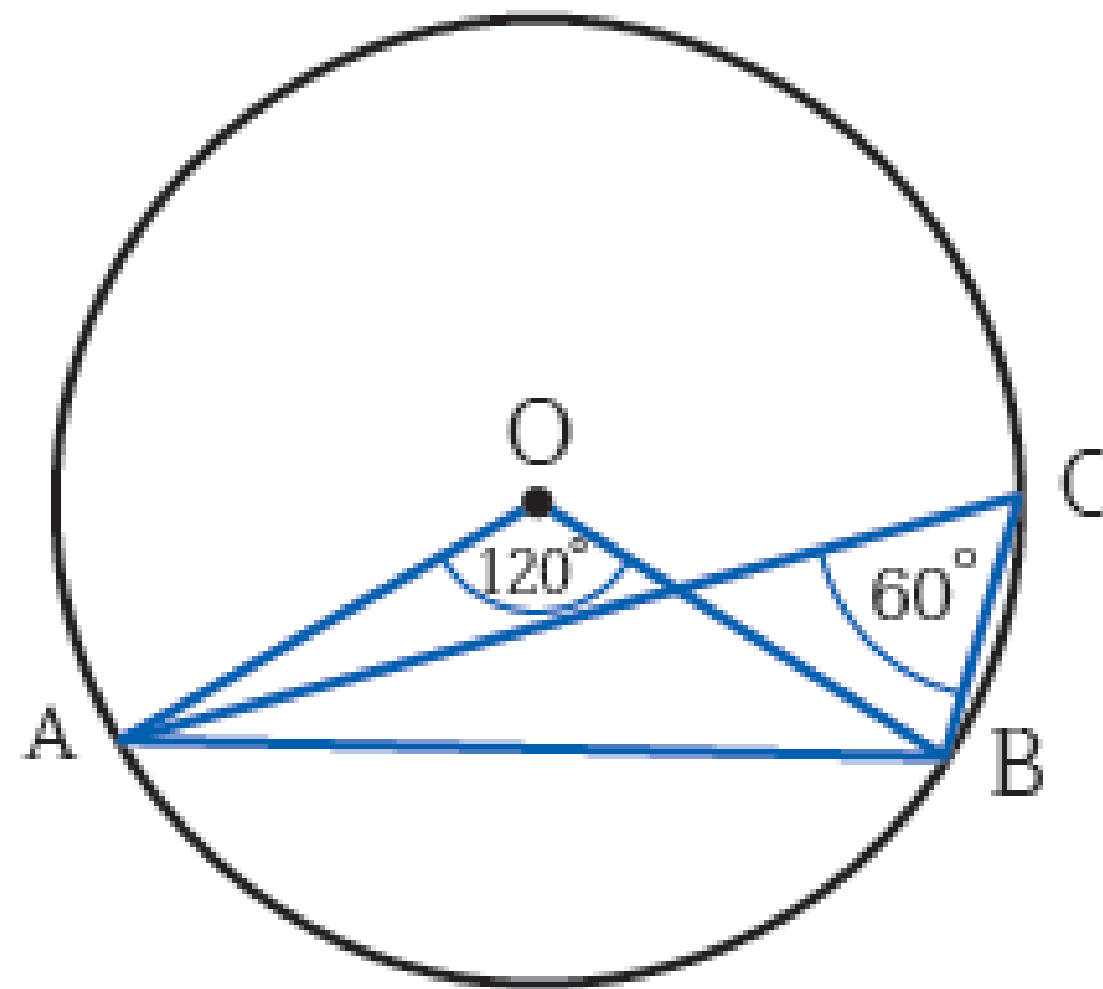
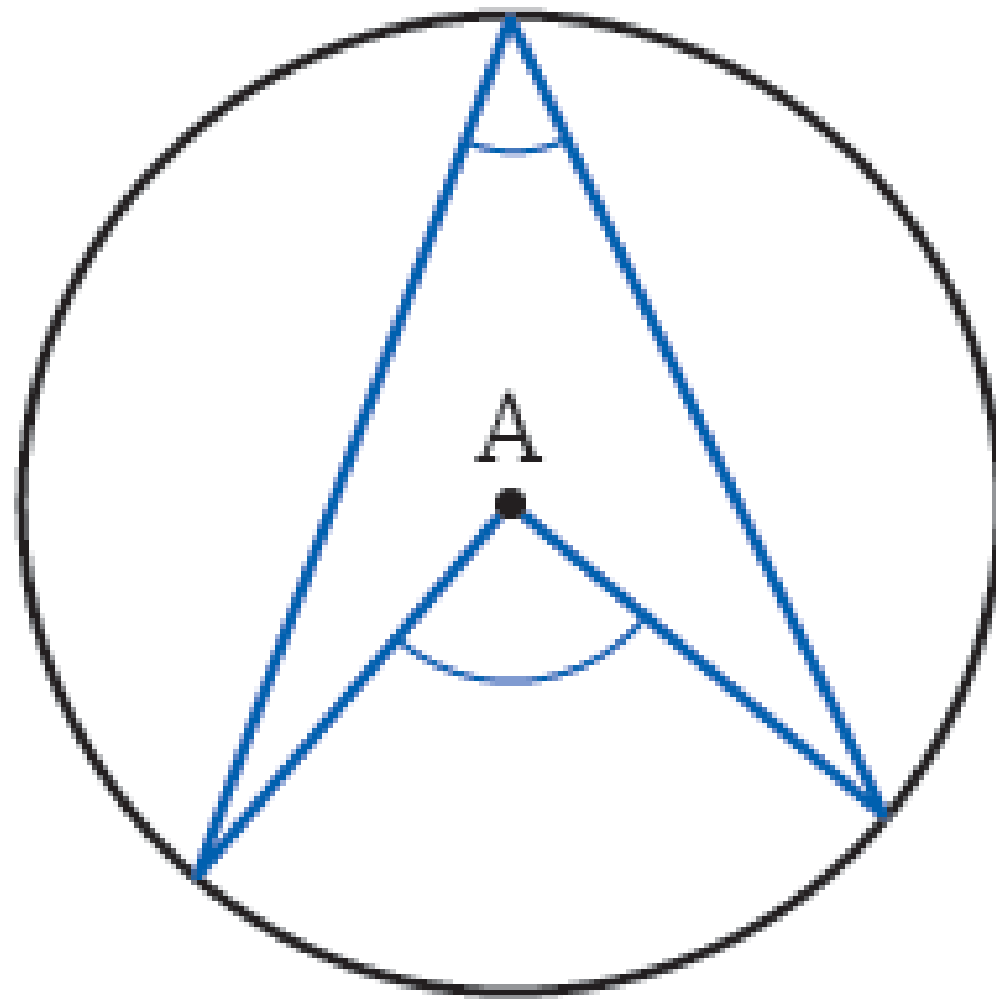
ทฤษฎีบท



ในวงกลมเดียวกันมุม
ที่จุดศูนย์กลาง
จะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุม
ในส่วนโค้งที่รองรับด้วย
ส่วนโค้งเดียวกัน

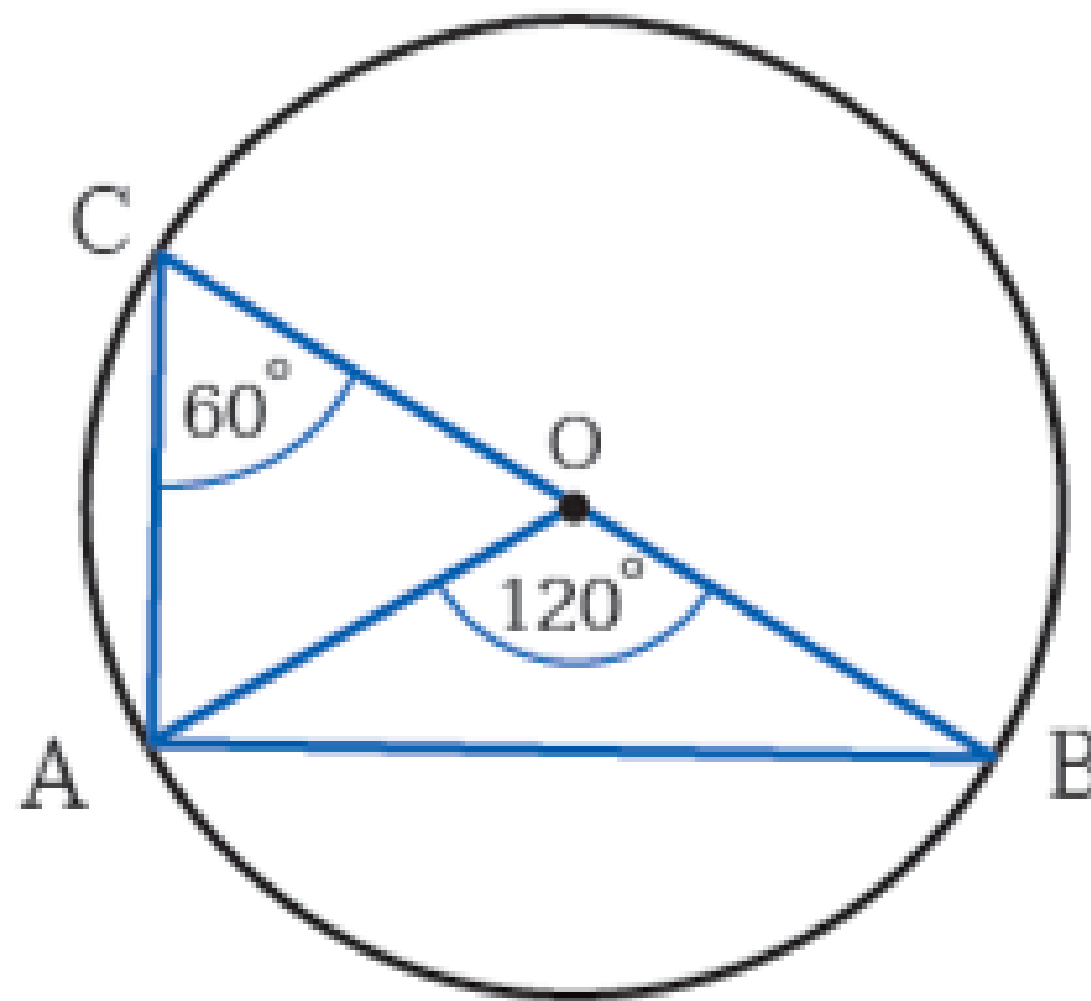
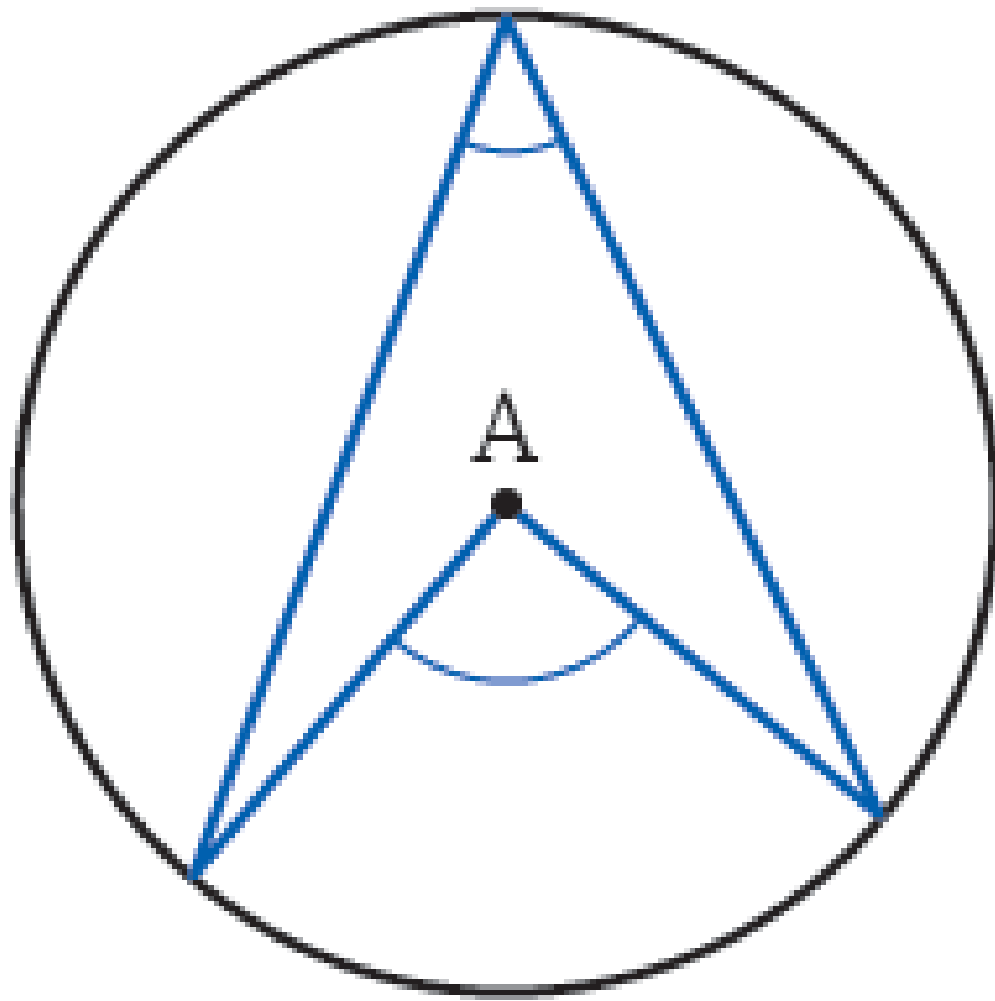
ในวงกลมเดียวกัน

มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุม
ในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



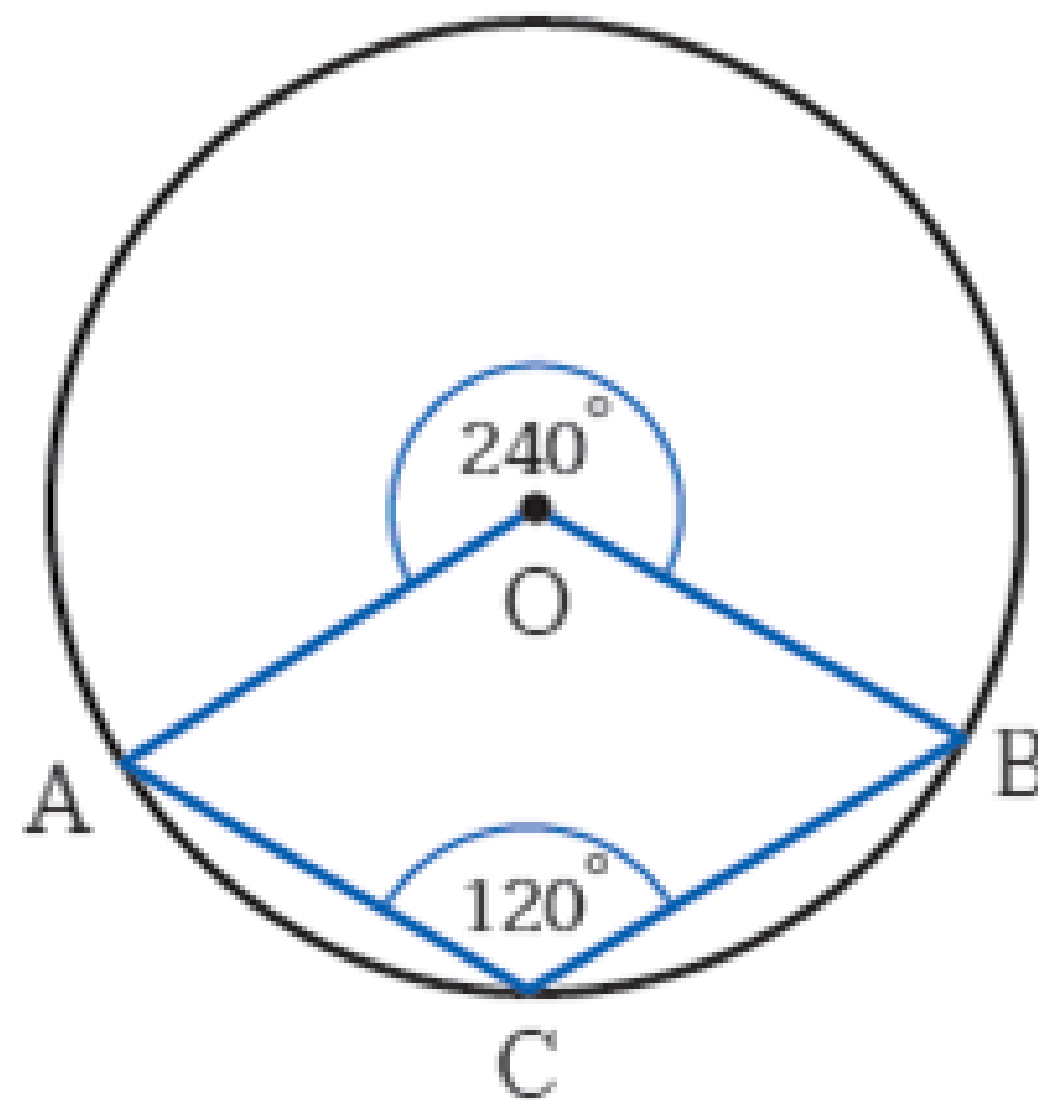
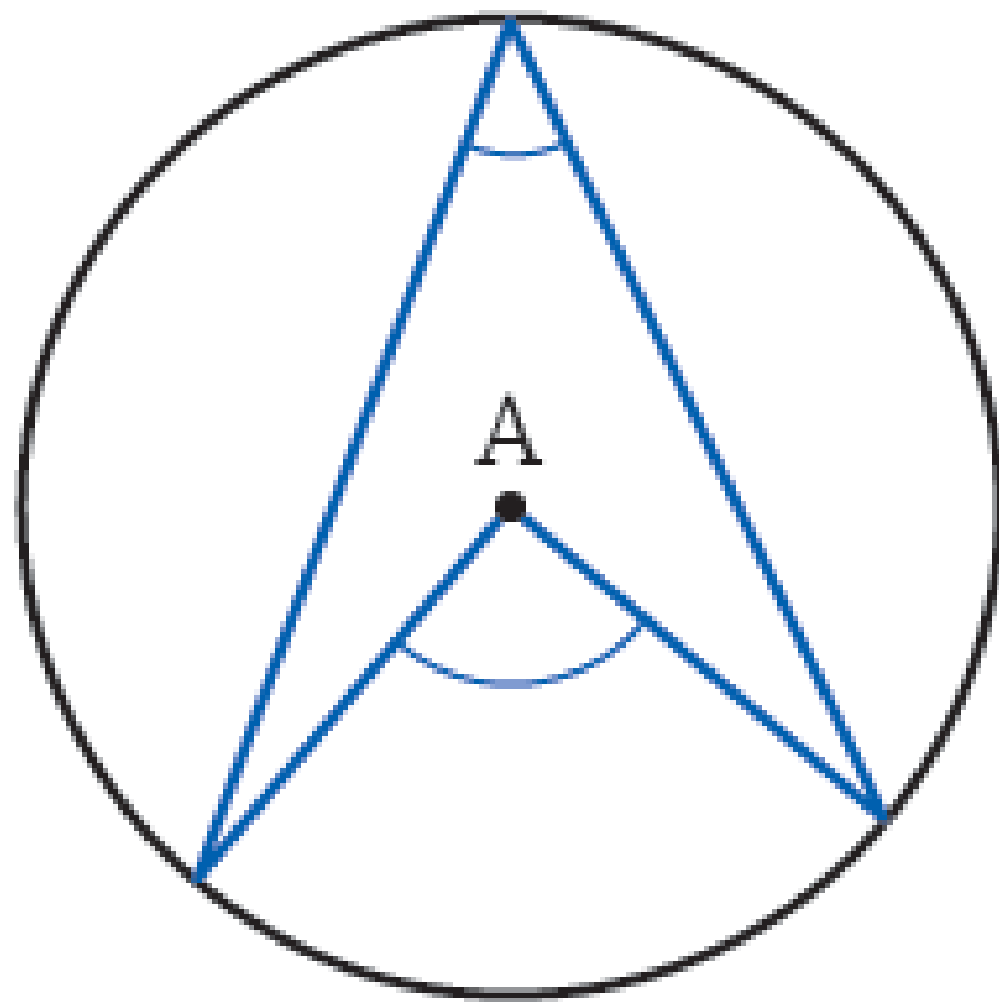
ในวงกลมเดียวกัน

มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุม
ในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



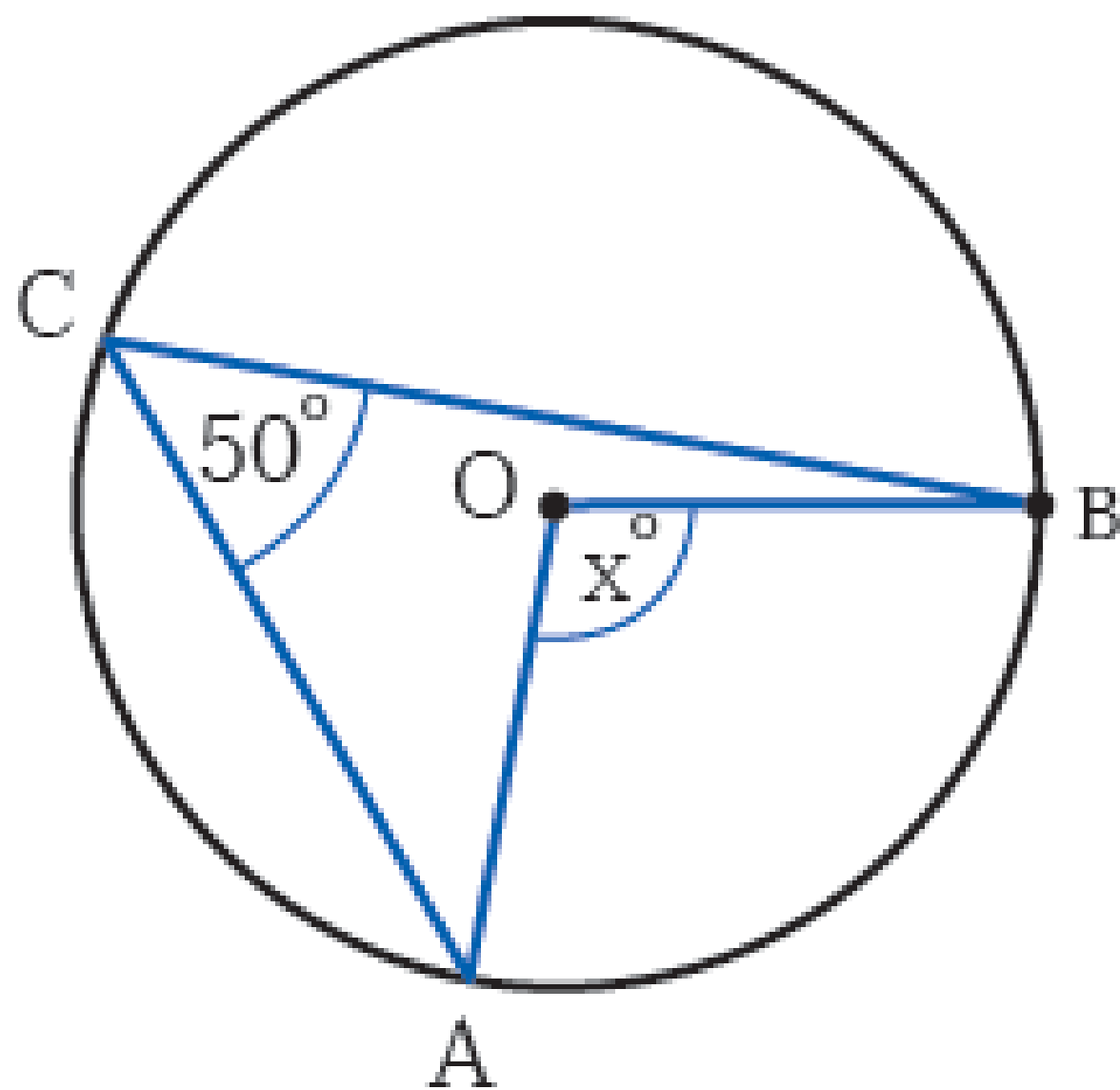
ในวงกลมเดียวกัน

มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุม
ในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



ตัวอย่างที่ 1

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



วิธีทำ เนื่องจาก $\angle ACB = 50^\circ$

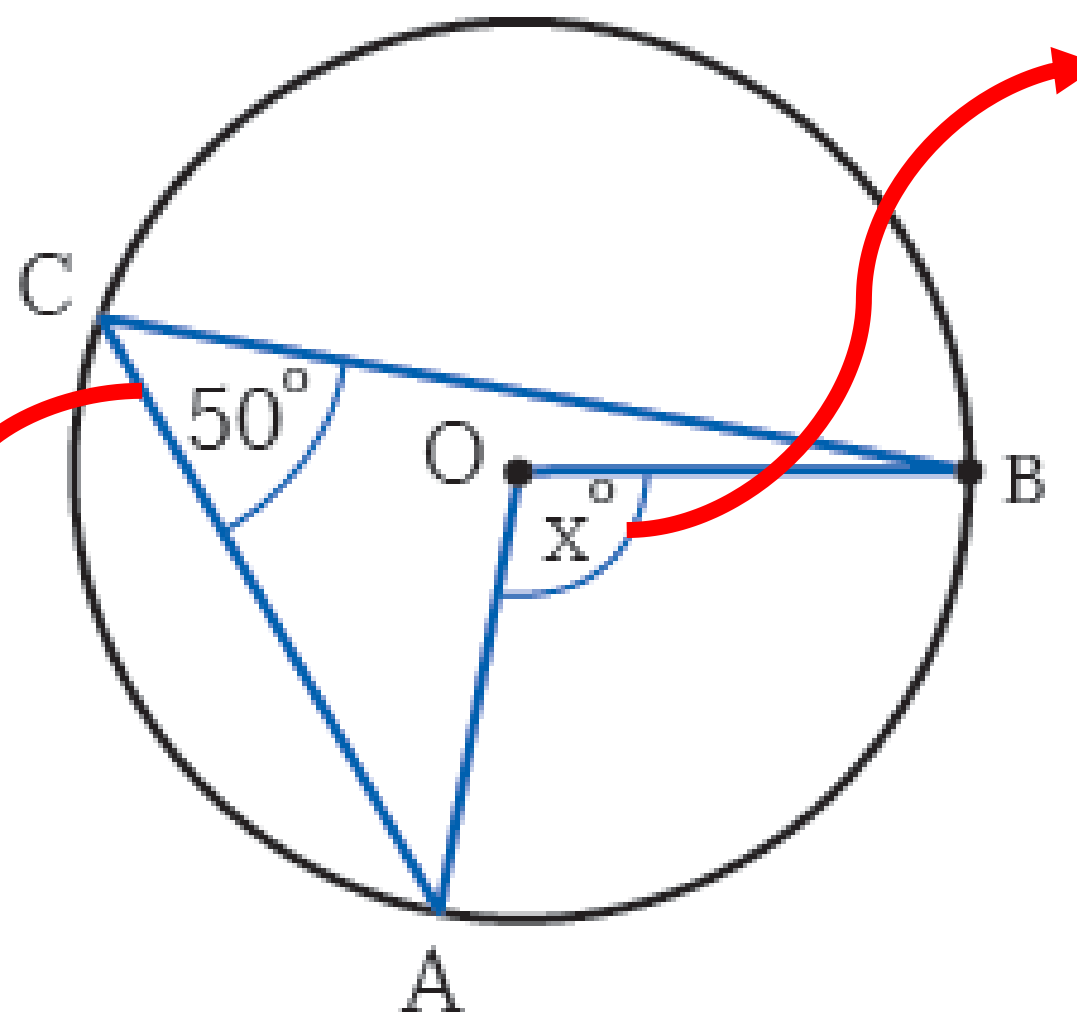
$$\begin{aligned}\text{จากทฤษฎีบท จะได้ว่า } \angle AOB &= 2(\angle ACB) \\ &= 2 \times 50 \\ &= 100^\circ\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x = 100$$

ตัวอย่างที่ 1

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x

เนื่องจาก $\angle ACB = 50^\circ$



จากทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$\angle AOB = 2(\angle ACB)$$

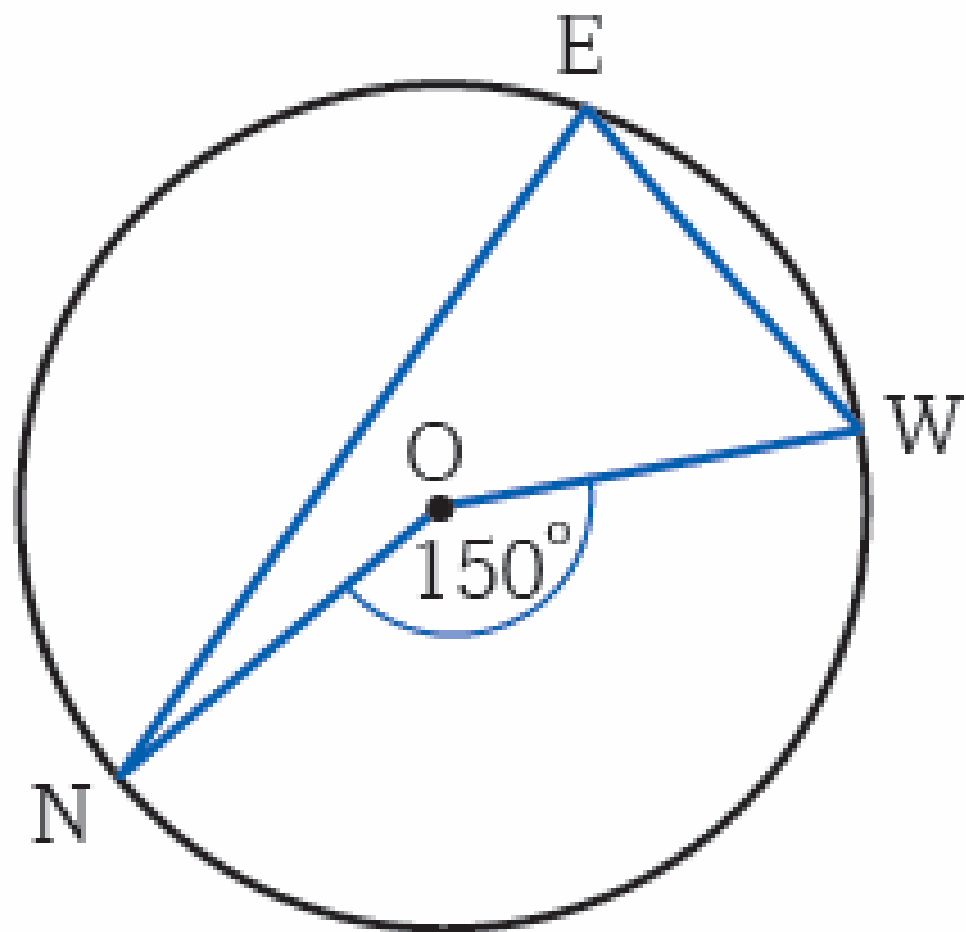
$$= 2 \times 50$$

$$= 100^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } x = 100$$

ตัวอย่างที่ 2

จากรูปมุม NOW มีขนาด 150 องศา
จงหาขนาดของมุม NEW



วิธีทำ เนื่องจาก $\widehat{NOW} = 150^\circ$

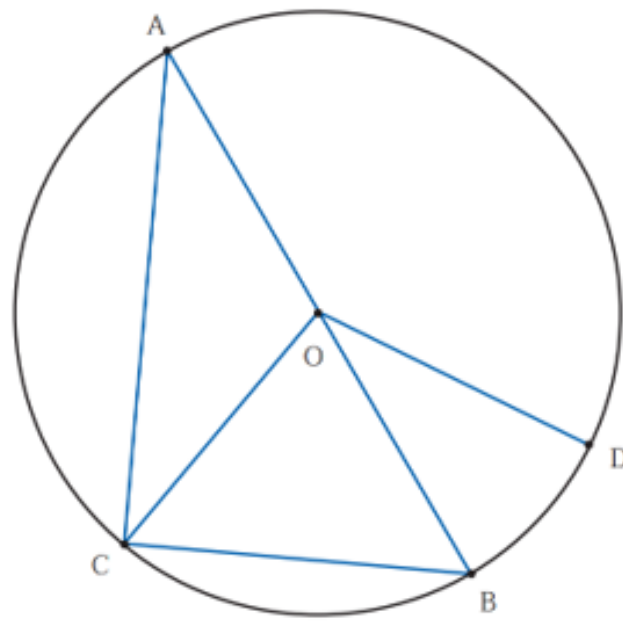
จากทฤษฎีบท จะได้ว่า $\widehat{NOW} = 2(\widehat{NEW})$

$$\begin{aligned}\widehat{NEW} &= \frac{1}{2} (\widehat{NOW}) \\ &= \frac{1}{2} (150) \\ &= 75^\circ\end{aligned}$$

ดังนั้น $\widehat{NEW} = 75^\circ$

แบบฝึกหัด 1 : ส่วนประกอบของวงกลม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจง กำหนดให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ดังรูป ให้นักเรียนระบุชื่อส่วนต่าง ๆ
ของวงกลม O อย่างน้อยส่วนประกอบละ 1 ชื่อ



1. ส่วนโค้งใหญ่
2. ส่วนโค้งน้อย
3. ส่วนโค้งที่เป็นครึ่งวงกลม
4. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
5. มุมในส่วนโค้งของวงกลม
6. มุมในครึ่งวงกลม

แบบฝึกหัด 1

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

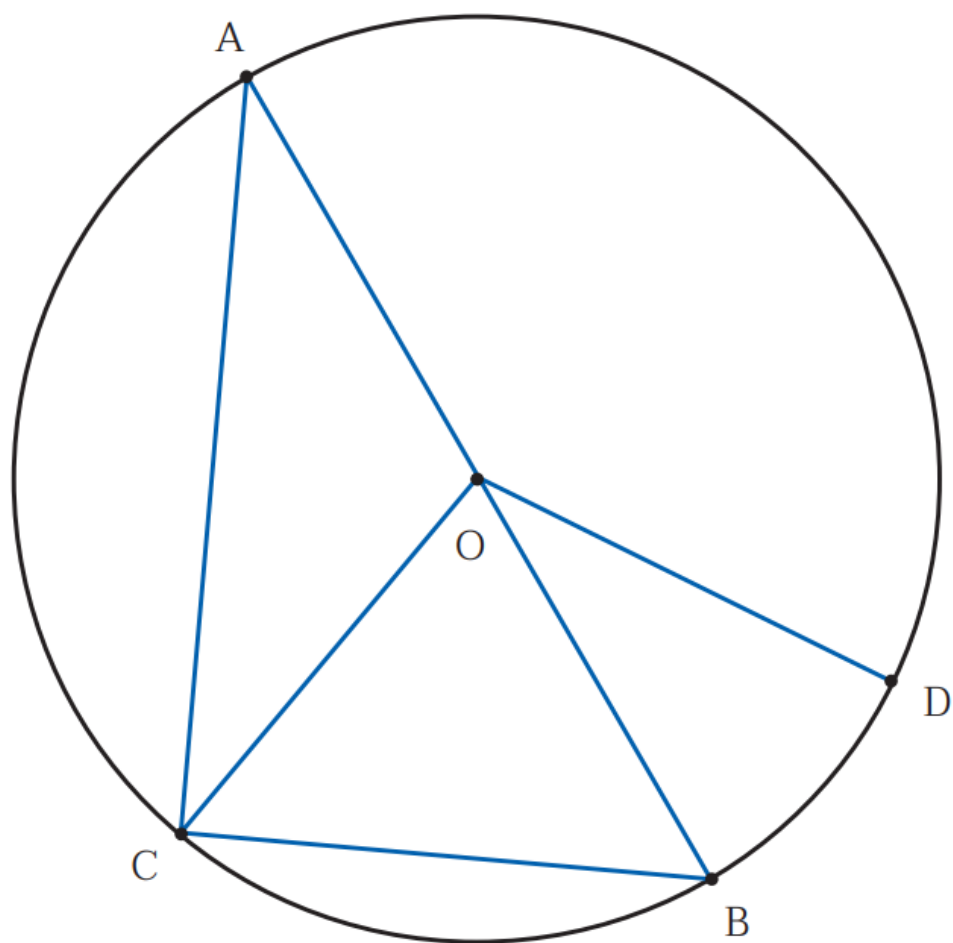
ส่วนประกอบของวงกลม



แบบฝึกหัด 1 : ส่วนประกอบของวงกลม

คำชี้แจง : กำหนดให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ดังรูป

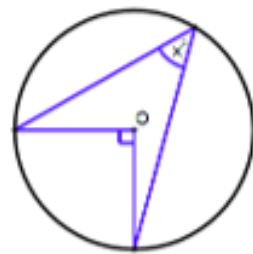
ให้นักเรียนระบุชื่อส่วนต่าง ๆ ของวงกลม O อย่างน้อยส่วนประกอบละ 1 ชื่อ



1. ส่วนโค้งใหญ่
2. ส่วนโค้งน้อย
3. ส่วนโค้งที่เป็นครึ่งวงกลม
4. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
5. มุมในส่วนโค้งของวงกลม
6. มุมในครึ่งวงกลม

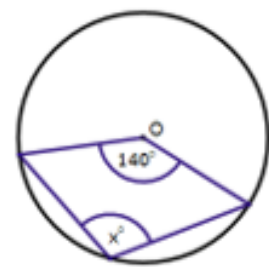
แบบฝึกหัด 2 : มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23102 ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



วิธีทำ

2. จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x

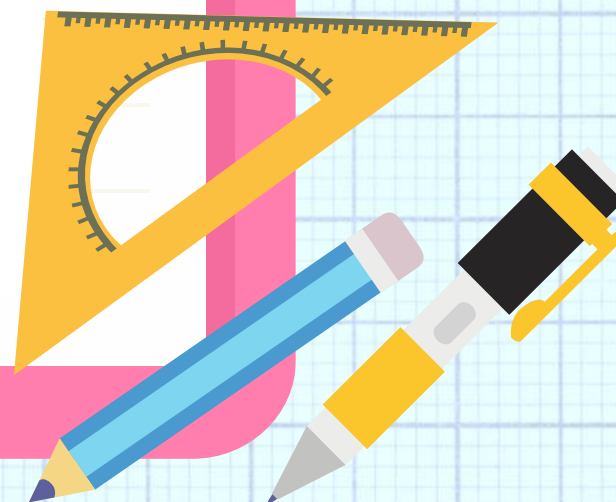


วิธีทำ

แบบฝึกหัด 2

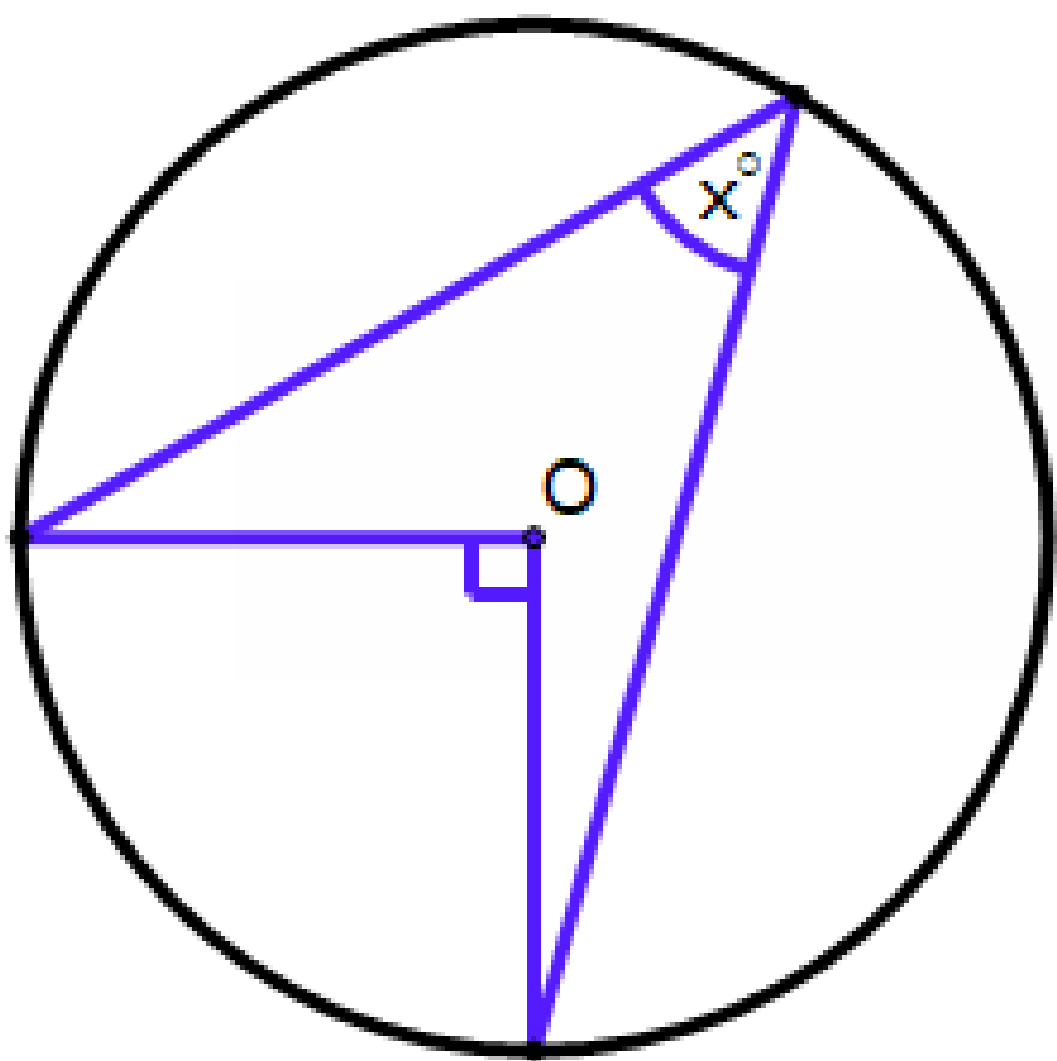
ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

มุมที่จุดศูนย์กลางและ
มุมในส่วนโค้งของวงกลม

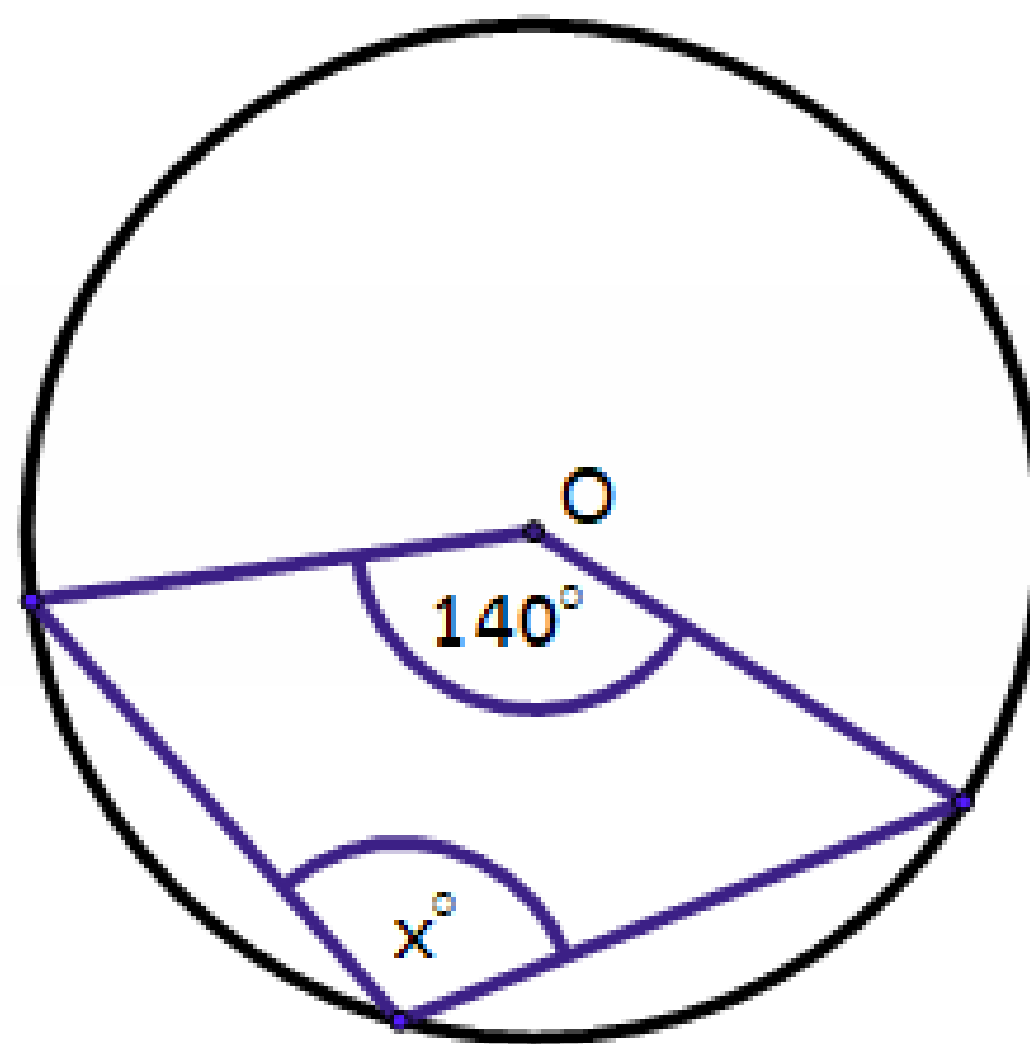


แบบฝึกหัด 2 : มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

1. จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x

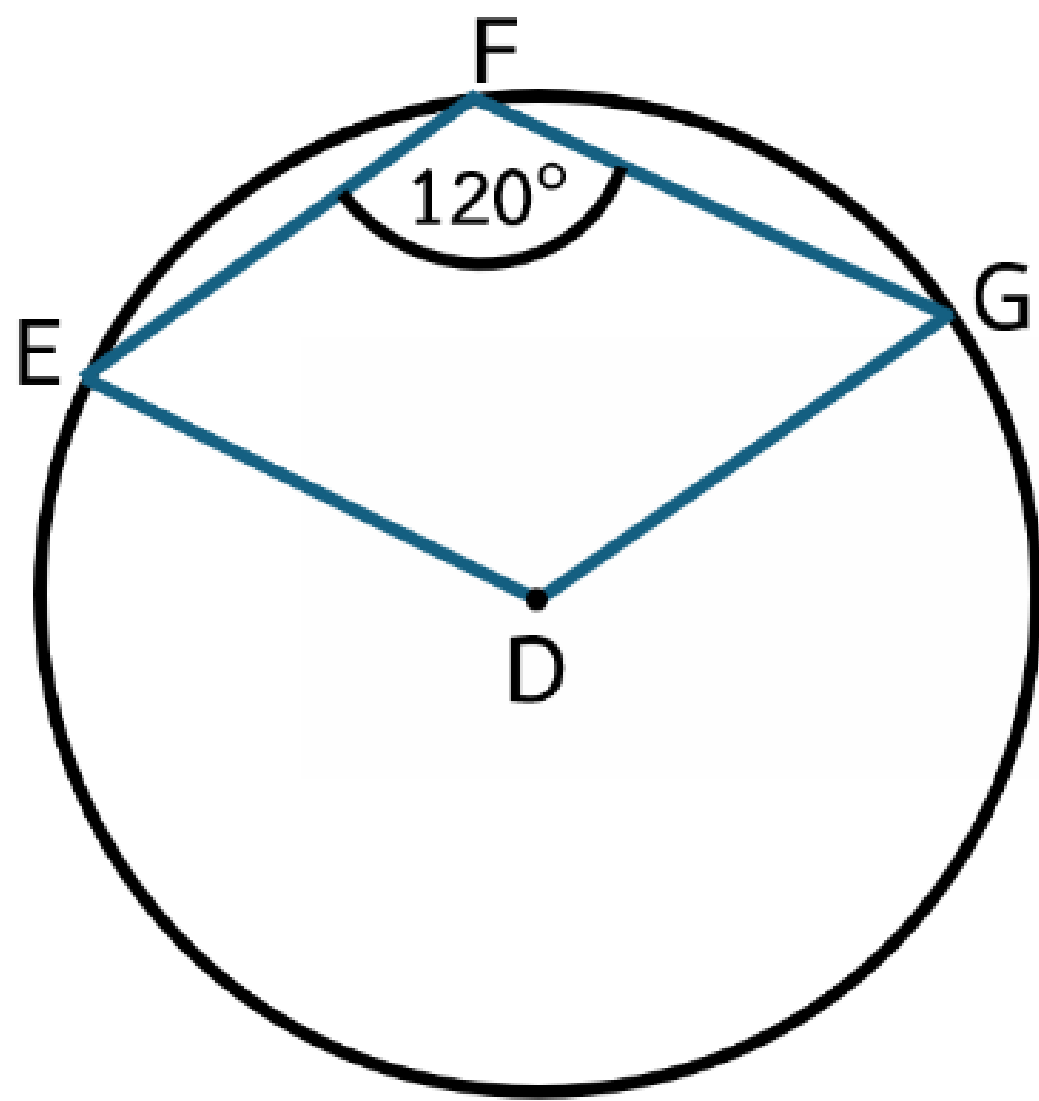


2. จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x

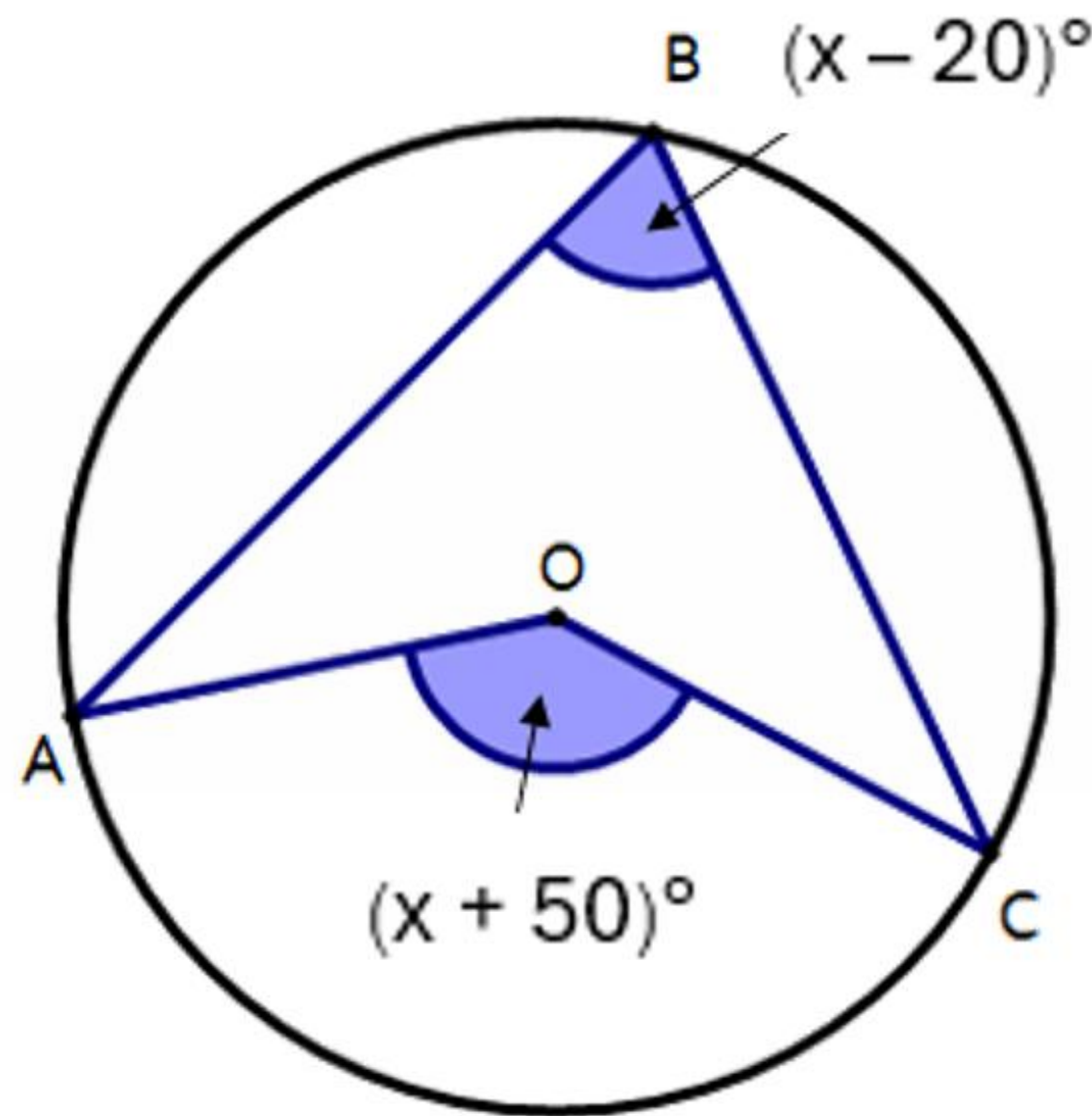


แบบฝึกหัด 2 : มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

3. จากวงกลม D จงหาขนาด $\widehat{EDG}$



4. จากวงกลม O จงหาขนาดของ $\widehat{AOC}$



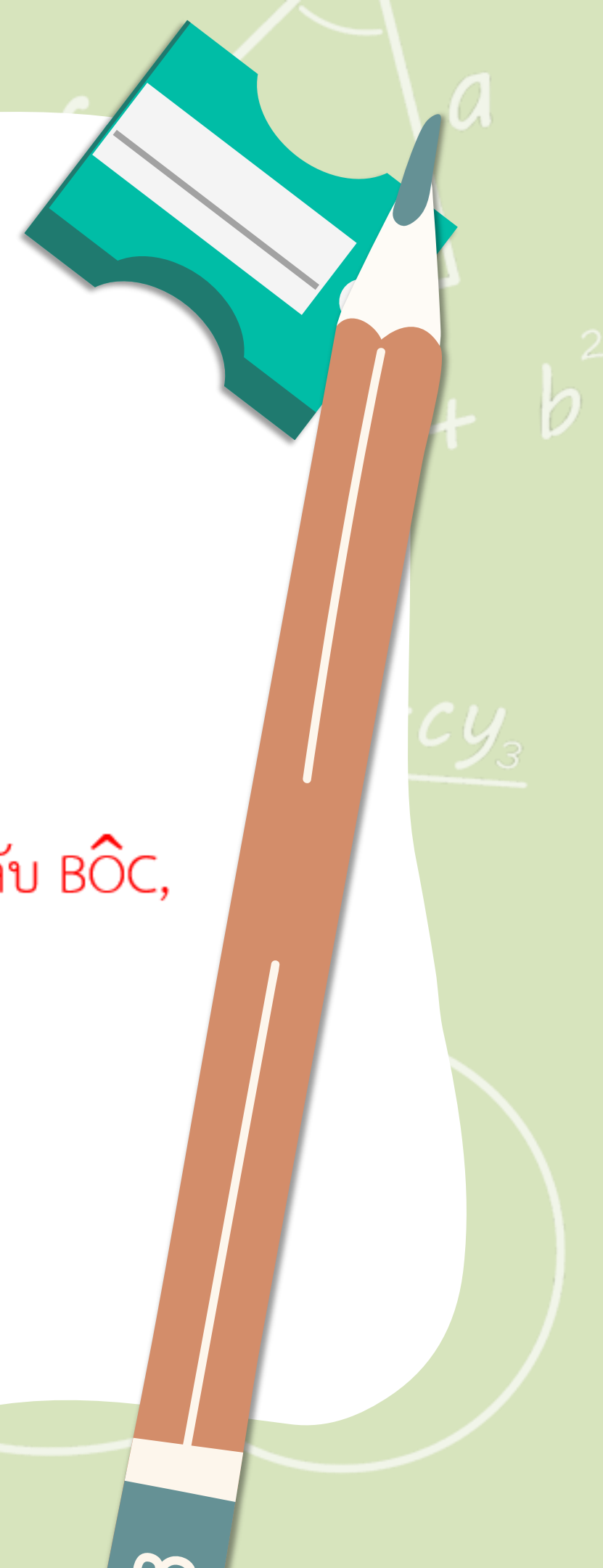
เฉลย...

แบบฝึกหัด



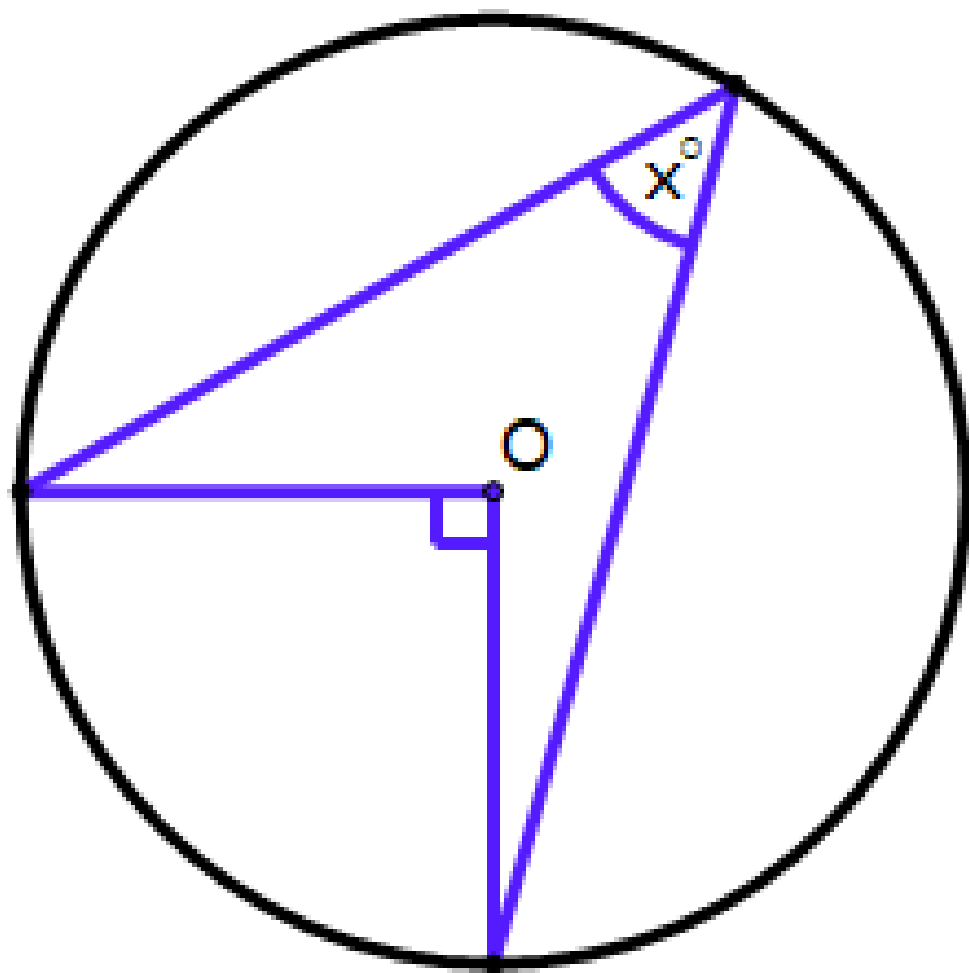
แบบฝึกหัด 1 : ส่วนประกอบของวงกลม

1. ส่วนโค้งใหญ่ $\widehat{ADC}$, $\widehat{CAB}$ และ $\widehat{ACD}$
2. ส่วนโค้งน้อย $\widehat{AC}$, $\widehat{CB}$, $\widehat{CBD}$, $\widehat{BD}$ และ $\widehat{AD}$
3. ส่วนโค้งที่เป็นครึ่งวงกลม $\widehat{ACB}$ และ $\widehat{ADB}$
4. มุมที่จุดศูนย์กลางกลางของวงกลม $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{COD}$, มุมกลับ $\widehat{AOC}$, มุมกลับ $\widehat{BOC}$, มุมกลับ $\widehat{BOD}$, มุมกลับ $\widehat{AOB}$, มุมกลับ $\widehat{AOD}$ และ มุมกลับ $\widehat{COD}$
5. มุมในส่วนโค้งของวงกลม $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$
6. มุมในครึ่งวงกลม $\widehat{ACB}$



แบบฝึกหัด 2 : มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

1. จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



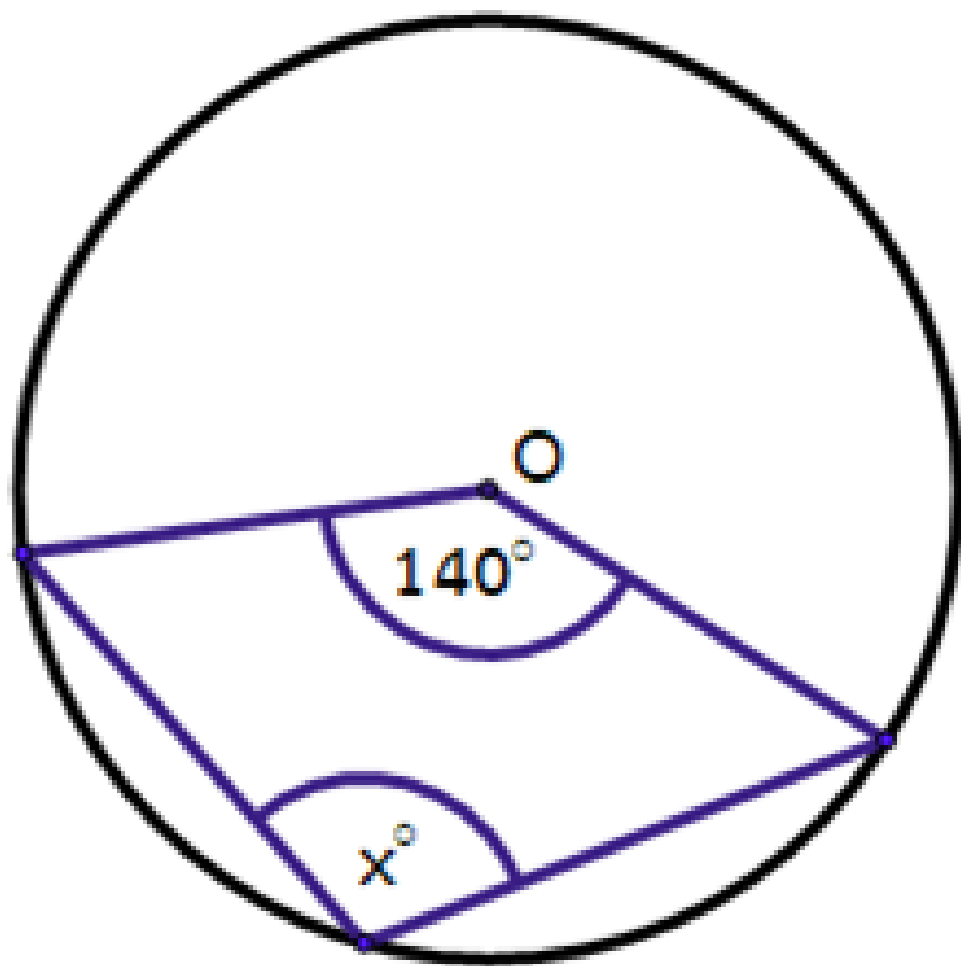
วิธีทำ เนื่องจาก
จากทฤษฎีบท จะได้ว่า
จะได้

$$\begin{aligned}\hat{O} &= 90^\circ \\ \hat{O} &= 2x \\ x &= \frac{90}{2} \\ x &= 45^\circ\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 45$

แบบฝึกหัด 2 : มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

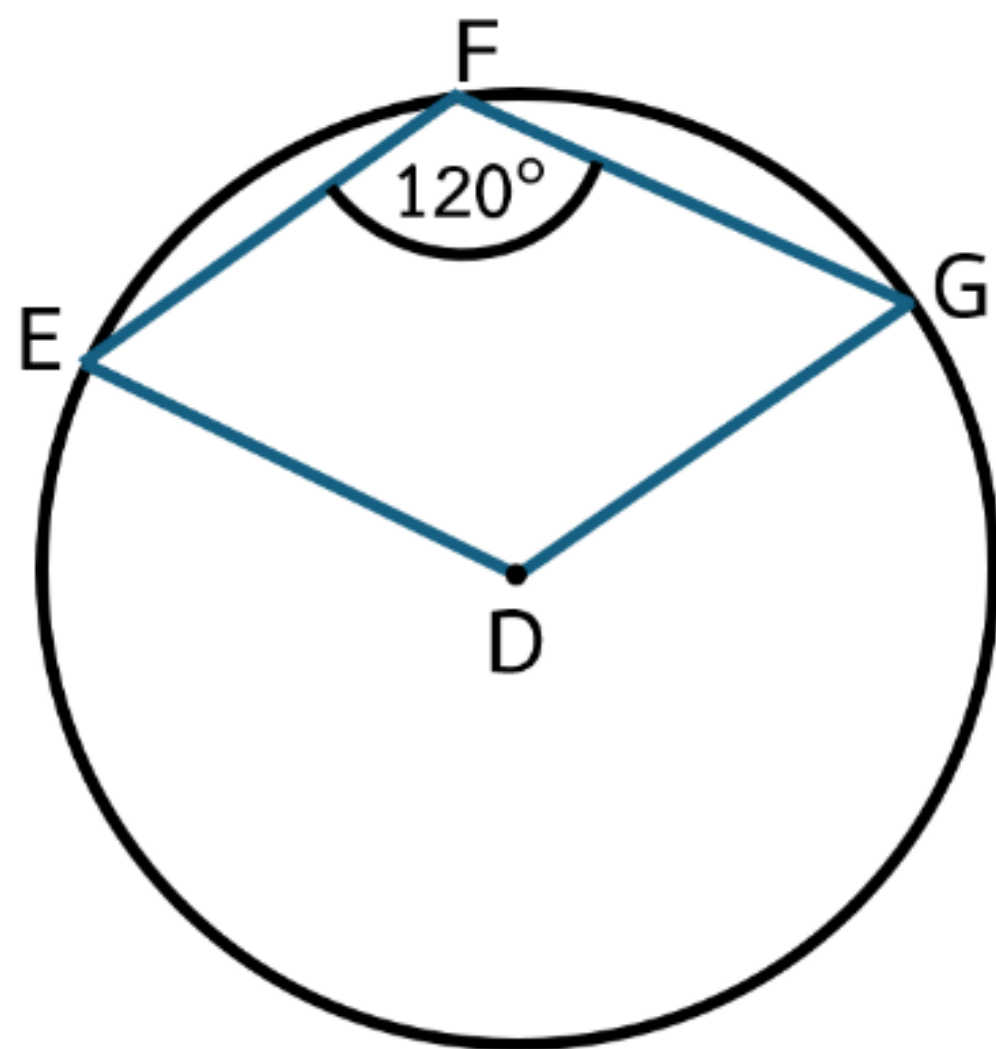
2. จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่า x



วิธีทำ	เนื่องจาก	$\hat{O}$	=	140°
	จะได้	มุมกลับ O	=	220°
	จากทฤษฎีบท จะได้ว่า	มุมกลับ O	=	$2x$
	จะได้	x	=	$\frac{220}{2}$
		x	=	110°
	ดังนั้น	$x = 110$		

แบบฝึกหัด 2 : มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

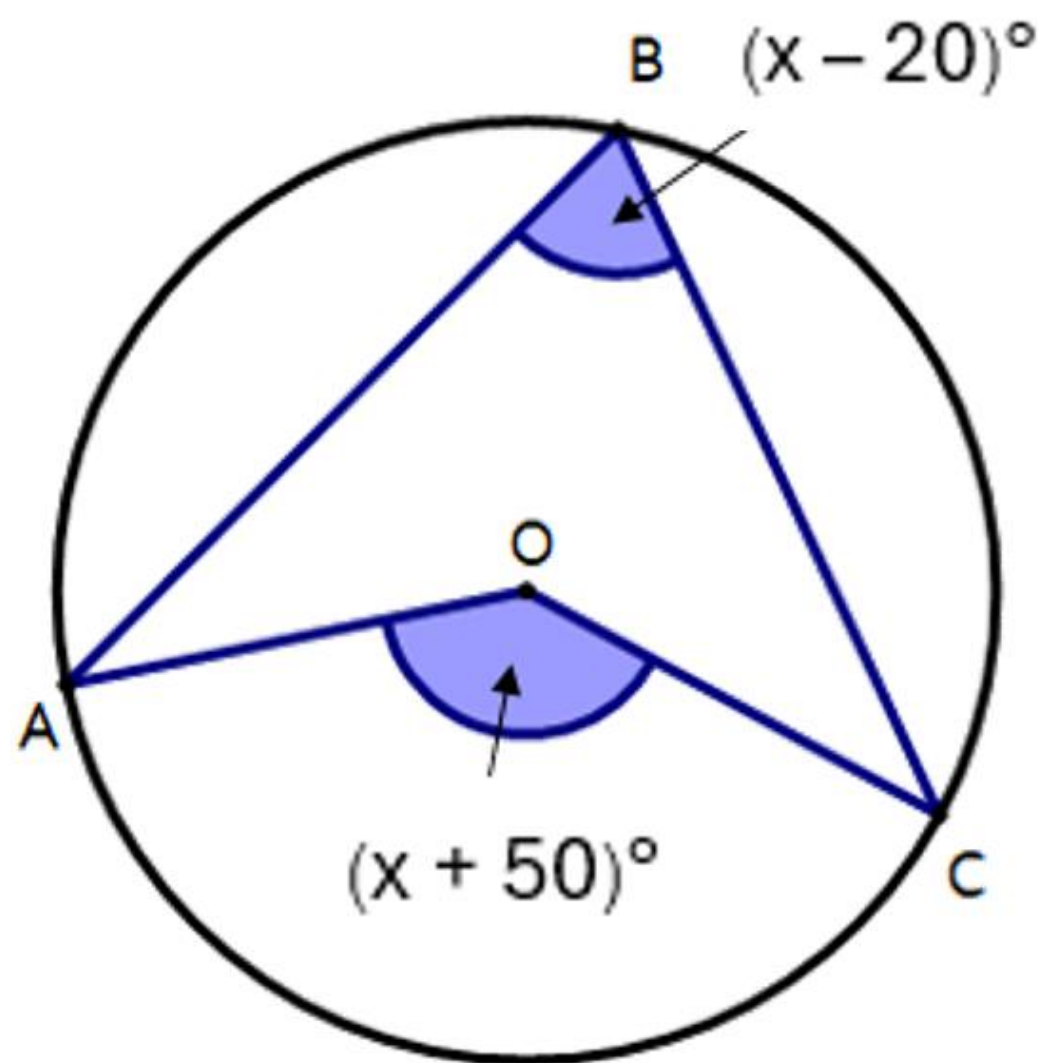
3. จากวงกลม D จงหาขนาด $\widehat{EDG}$



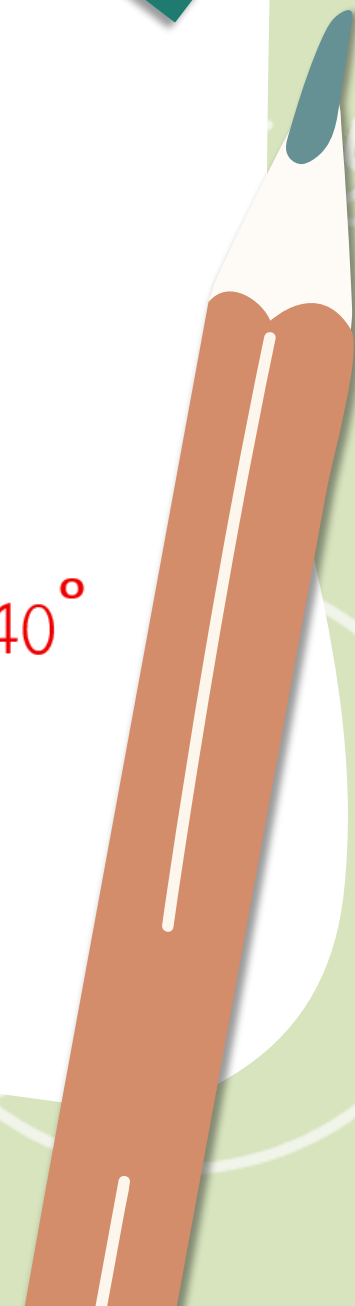
วิธีทำ จาก $\widehat{EFG} = 120^\circ$
จะได้มุมกลับ $\widehat{EDG} = 240^\circ$
จึงได้ว่า $\widehat{EDG} = 360 - 240$
 $= 120^\circ$
ดังนั้น $\widehat{EDG} = 120^\circ$

แบบฝึกหัด 2 : มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

4. จากวงกลม O จงหาขนาดของ $\widehat{AOC}$

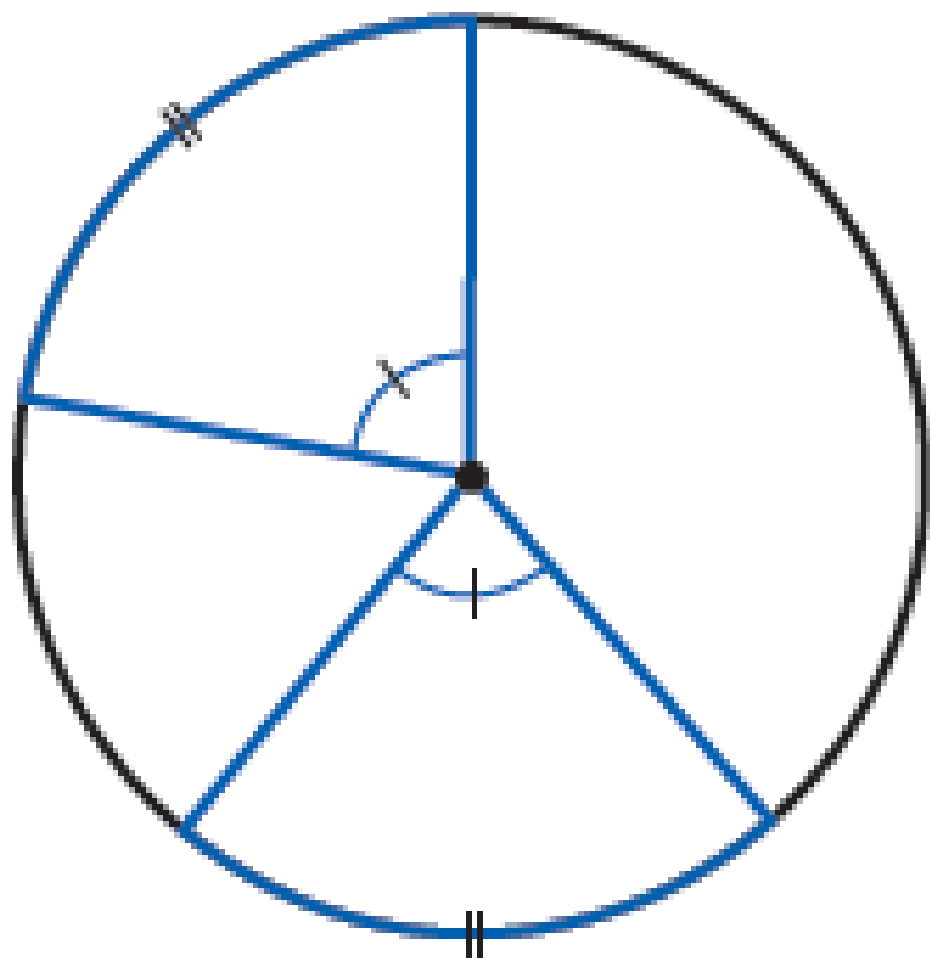


วิธีทำ	จาก	$\widehat{AOC}$	=	$2(\widehat{ABC})$	
	จะได้	$x + 50$	=	$2(x - 20)$	
		$x + 50$	=	$2x - 40$	
		x	=	90	
	จะได้ว่า	$\widehat{AOC}$	=	$90 + 50$	= 140°
	ดังนั้น	$\widehat{AOC}$	=	140°	



สรุปบทเรียน

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลาง



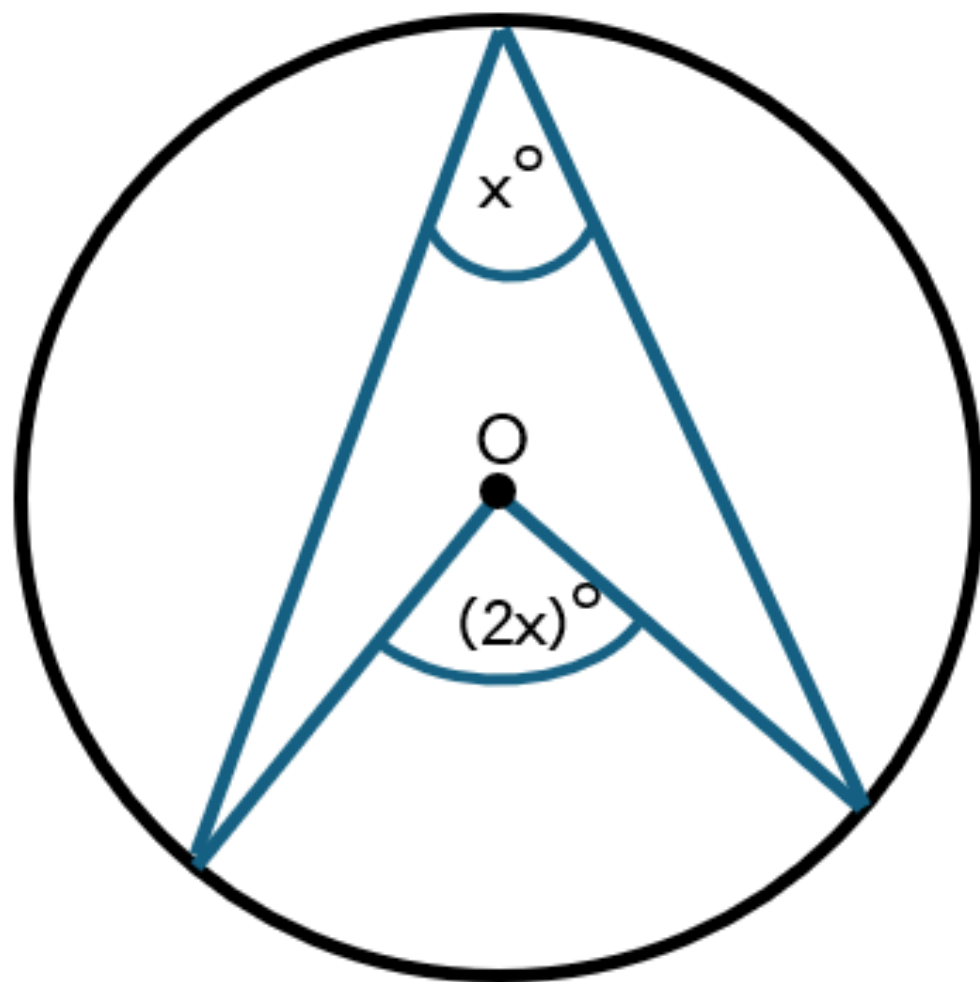
ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น จะยาวเท่ากัน

ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

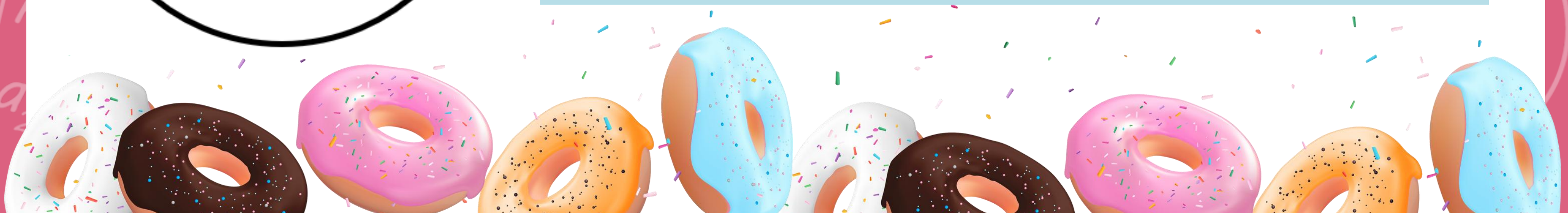


สรุปบทเรียน

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม



ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



บทเรียนครั้งต่อไป

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

มุมในส่วนโค้งของวงกลม
ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



สิ่งที่ต้องเตรียม

ดาวน์โหลดข้อมูลได้ที่ www.dltv.ac.th

แบบฝึกหัด 3 :

มุมในส่วนโค้งของวงกลม
ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

