

รายวิชา คณิตศาสตร์

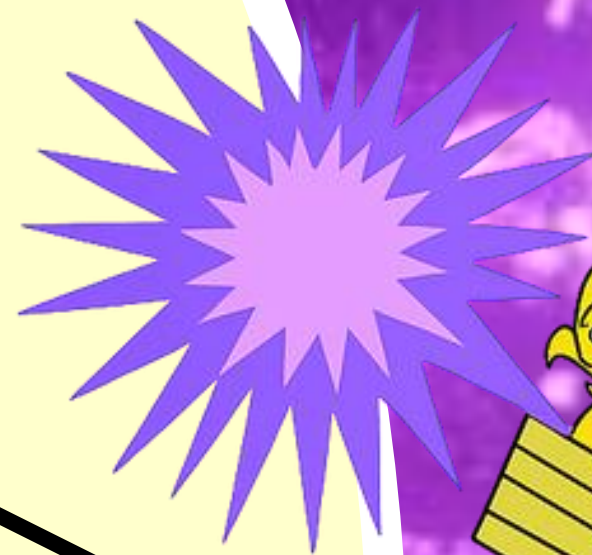
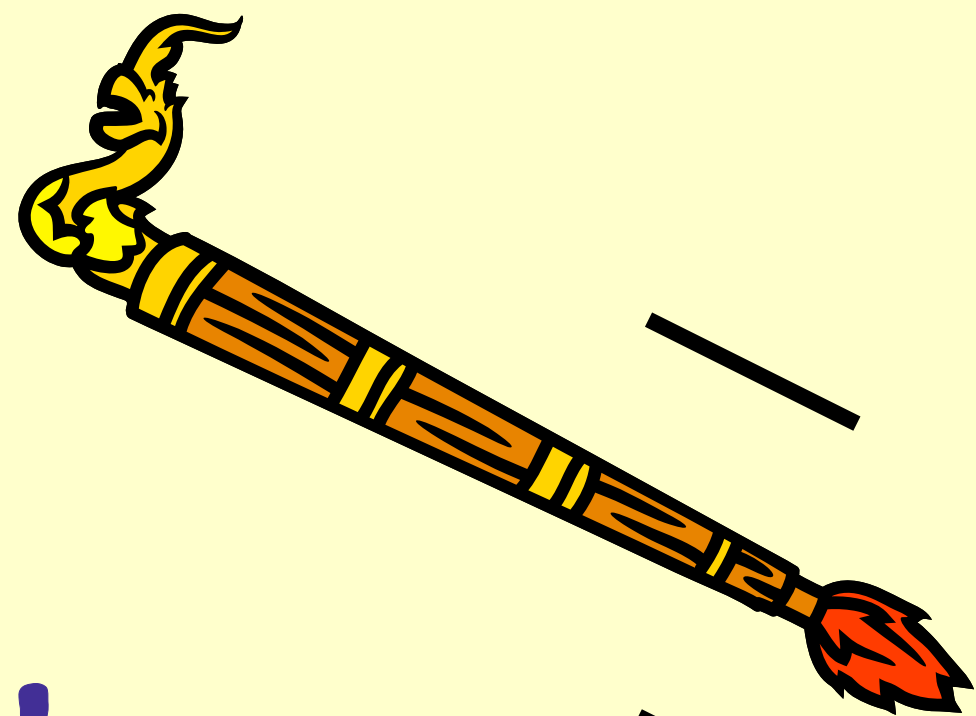
รหัสวิชา ค23101 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
หน่วยที่ 5 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ
กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

ครูผู้สอน ครูเกียรติศักดิ์ แสงทอง



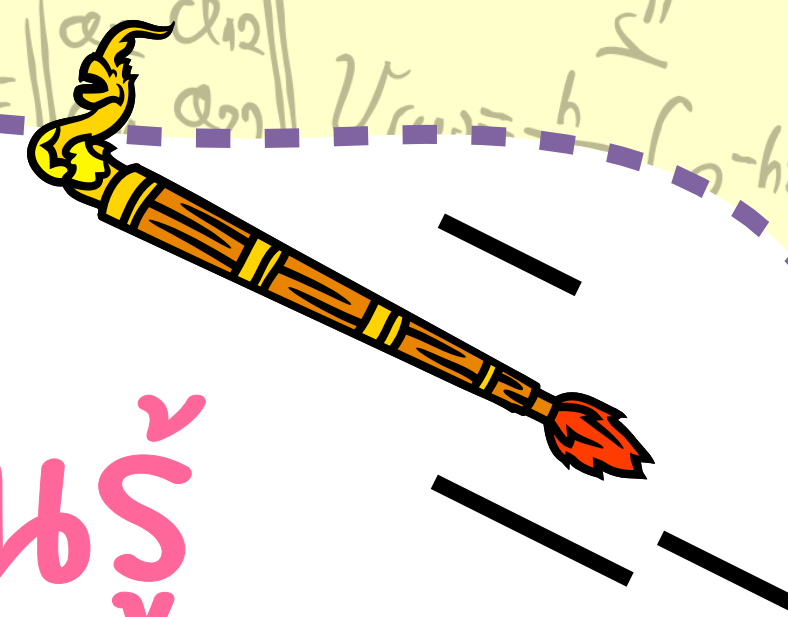
โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง



จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. เขียนสมการของพาราโบลาแทนโจทย์ปัญหา
 2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง
- พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผลของคำตอบได้



ให้ a, b, c, h และ k เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a \neq 0$

$$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow y = a(x - h)^2 + k$$

ใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์
หรือใช้สูตรในการจัดรูป

$$h = -\frac{b}{2a}$$
$$k = f(h)$$

เป็นสมการพาราโบลา มีจุดยอดคือ (h, k)

ค่า a (คว่ำ, หงาย และความบาน)

- $a > 0$ พาราโบลาหงาย มีจุดต่ำสุด
- $a < 0$ พาราโบลาคว่ำ มีจุดสูงสุด
- $|a|$ ยิ่งน้อย กราฟยิ่งบานมาก
- $|a|$ ยิ่งมาก กราฟยิ่งบานน้อย

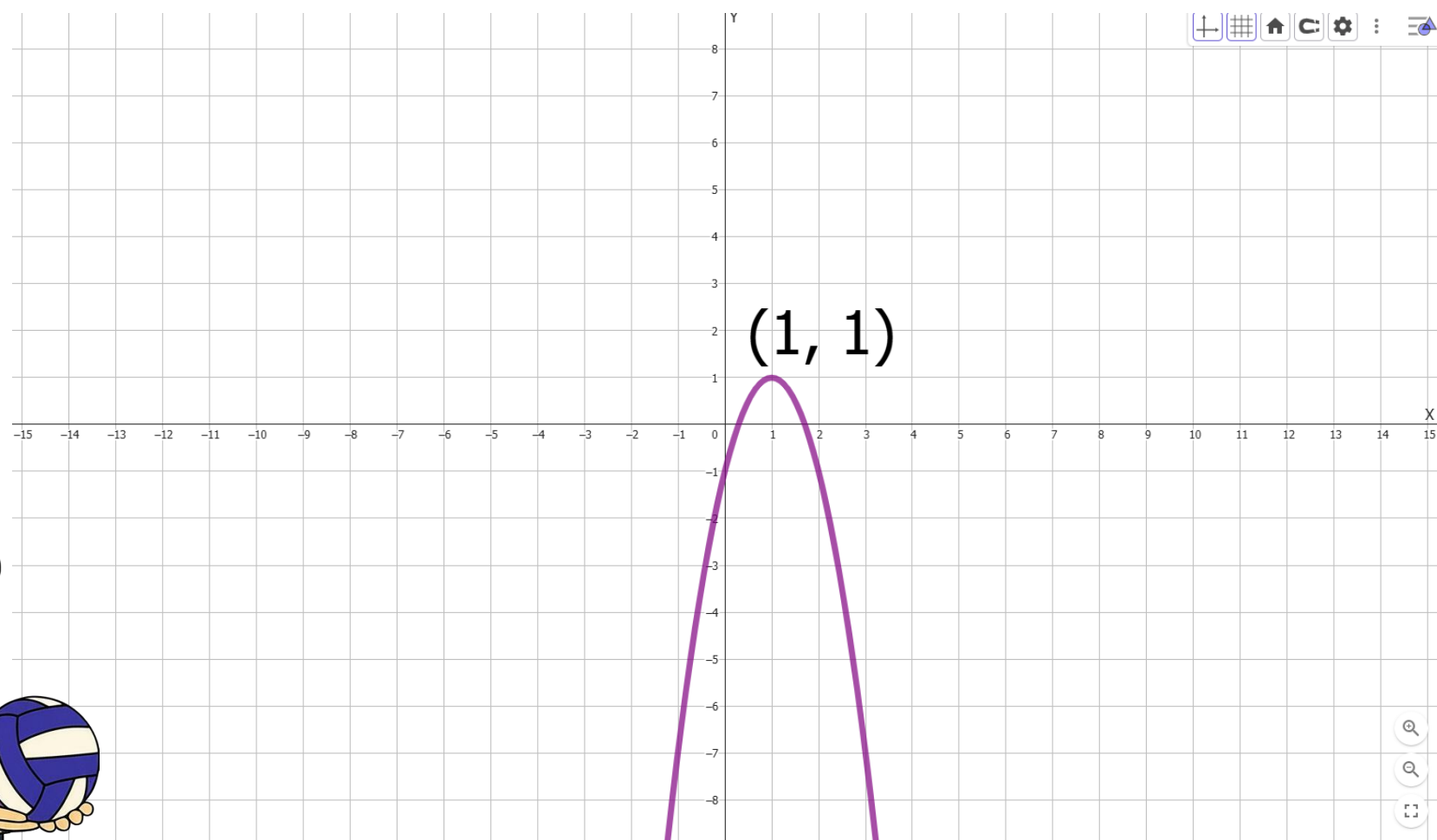
ค่า h (เลื่อนซ้ายขวาและแกนสมมาตร)

- $h > 0$ กราฟเลื่อนมาทางขวาของแกน Y
- $h < 0$ กราฟเลื่อนมาทางซ้ายของแกน Y
- แกนสมมาตร คือ $x = h$

ค่า k (เลื่อนบนล่างและค่าสูงสุดต่ำสุด)

- $k > 0$ กราฟเลื่อนขึ้นบนเหนือแกน X
- $h < 0$ กราฟเลื่อนลงล่างใต้แกน X
- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด คือ $y = k$

นักเรียนคิดว่า กราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟของสมการใด



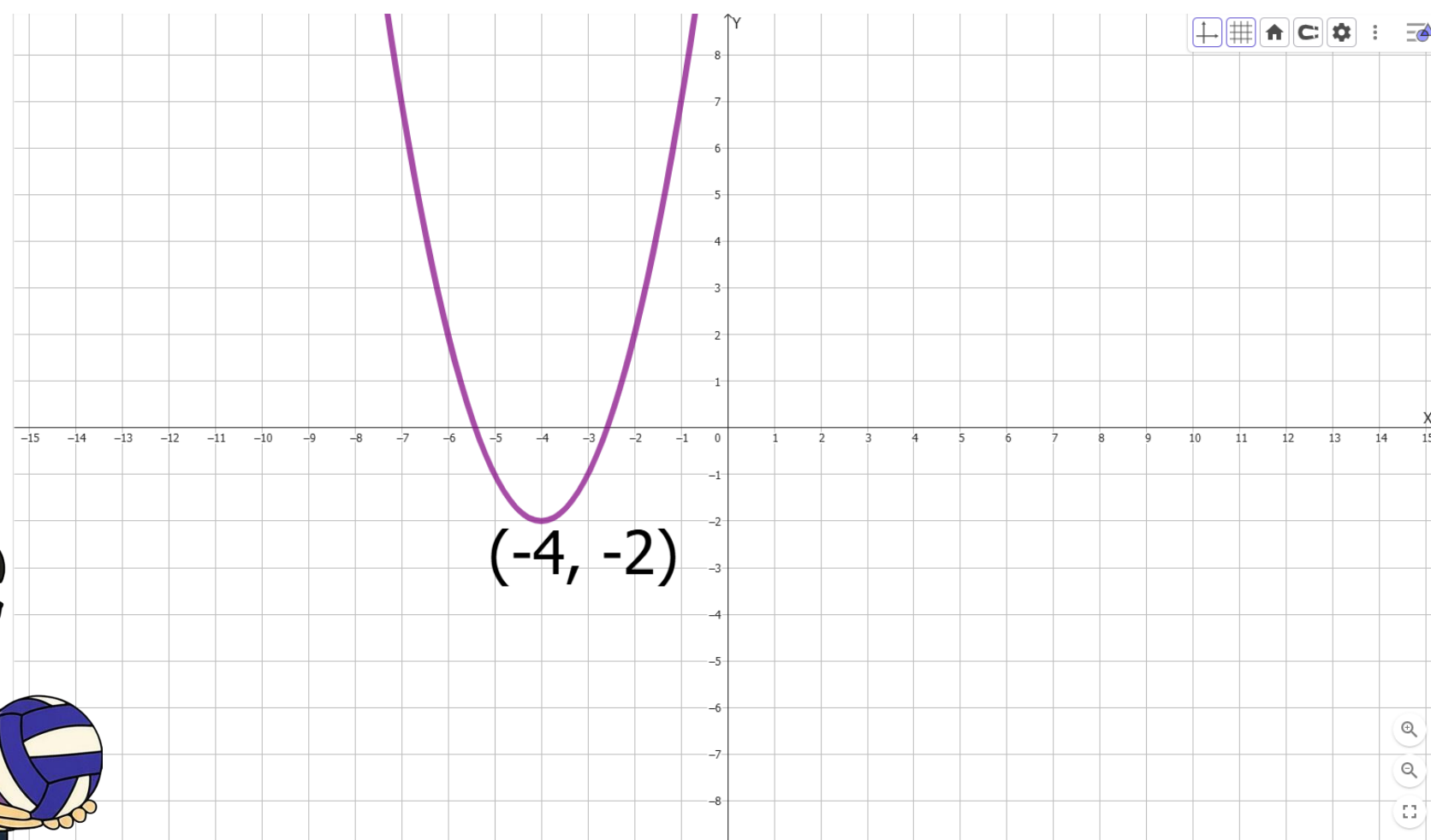
ก. $y = -2(x - 1)^2 + 1$

ข. $y = 2(x - 1)^2 - 1$

ค. $y = -2(x + 1)^2 + 1$

ง. $y = 2(x - 1)^2 + 1$

นักเรียนคิดว่า กราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟของสมการใด



ก. $y = (x - 4)^2 + 2$

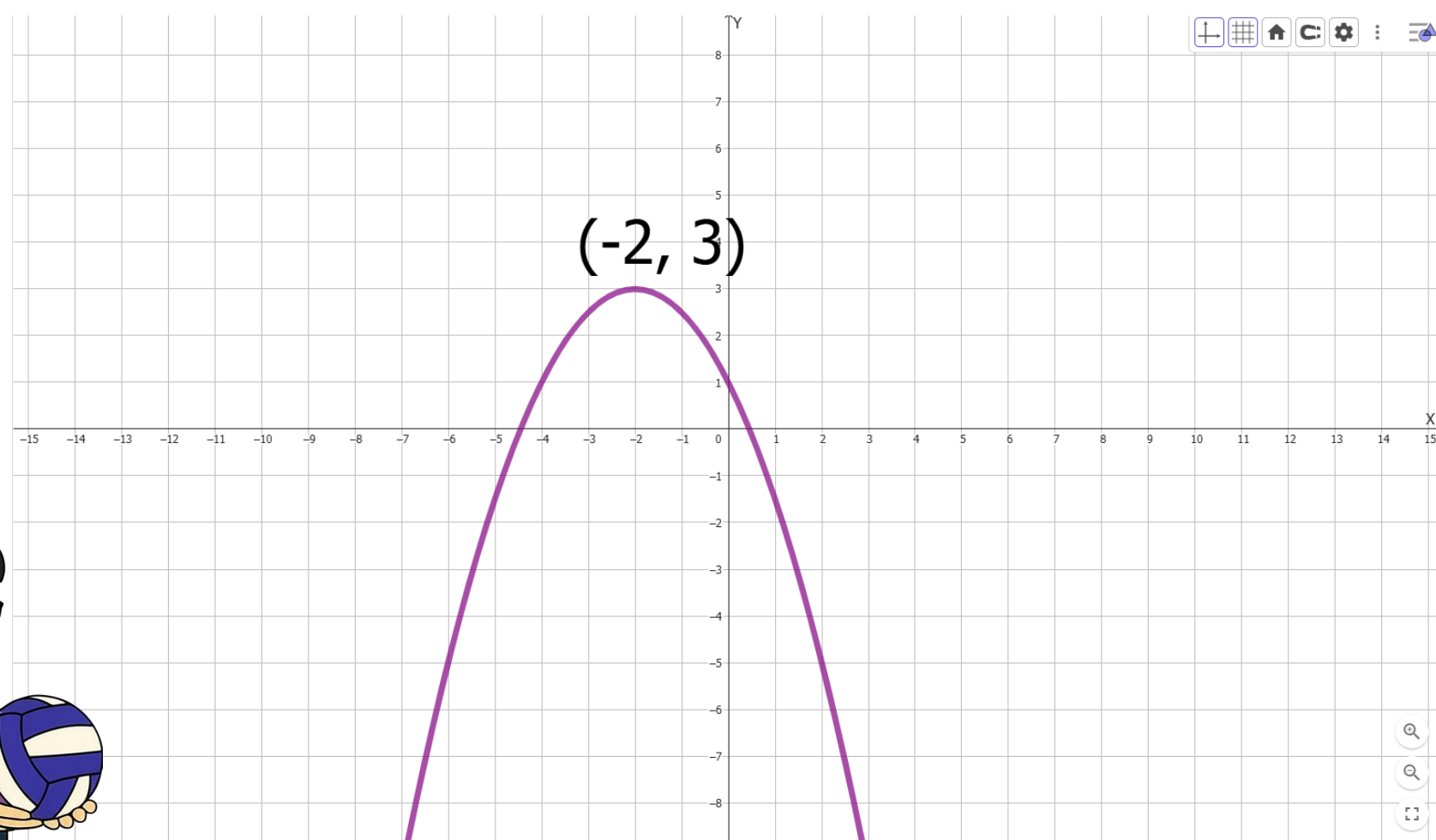
ข. $y = (x + 4)^2 - 2$

ค. $y = -(x - 4)^2 - 2$

ง. $y = -(x + 4)^2 + 2$



นักเรียนคิดว่า กราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟของสมการใด



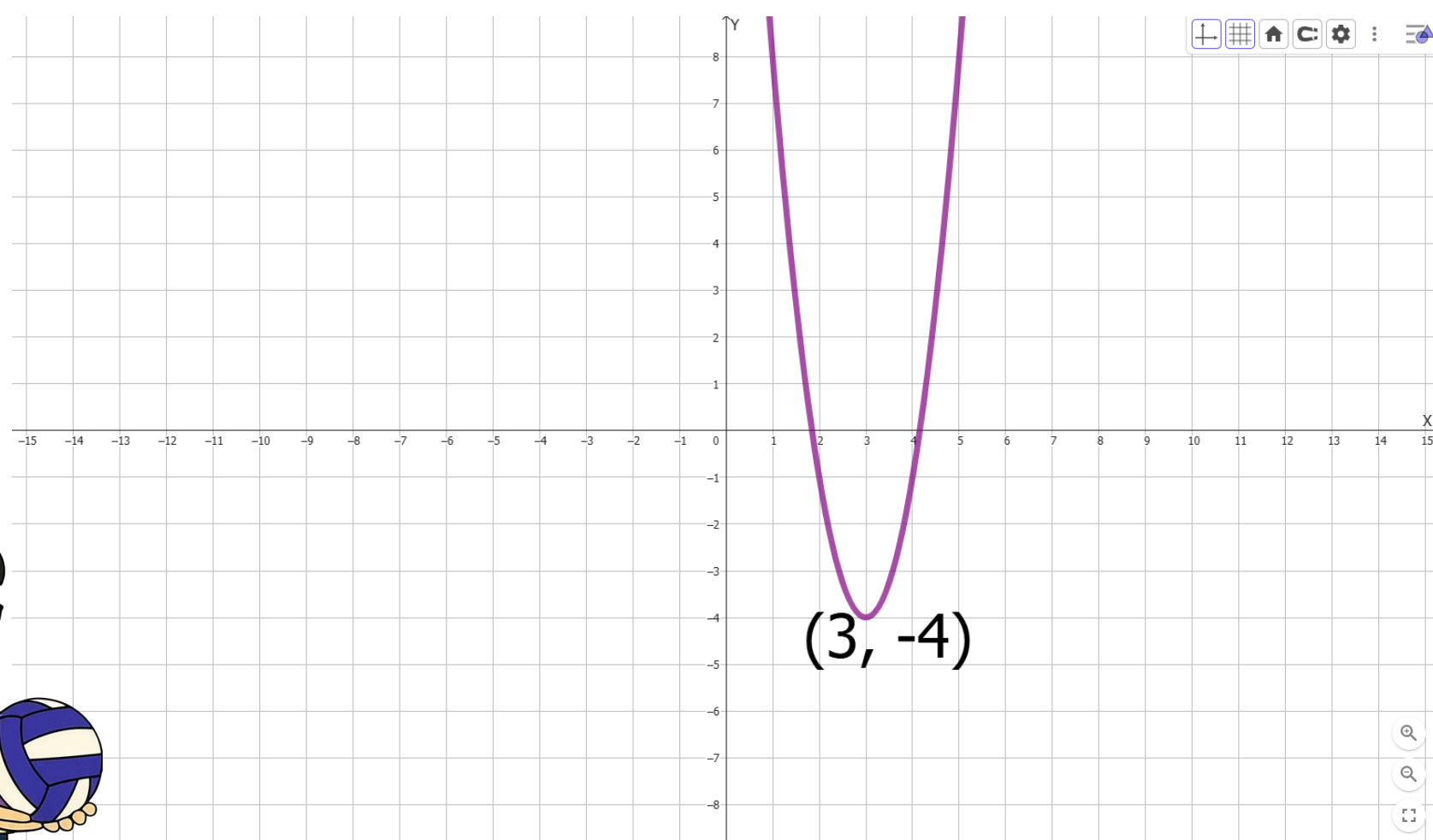
$$\text{ก. } y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$$

$$\text{ข. } y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$$

$$\text{ค. } y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$$

$$\text{ง. } y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$$

นักเรียนคิดว่า กราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟของสมการใด



ก. $y = 3(x + 3)^2 + 4$

ข. $y = 3(x - 3)^2 + 4$

ค. $y = 3(x + 3)^2 - 4$

ง. $y = 3(x - 3)^2 - 4$



ตัวอย่างที่ 1 การยิงบั้งไฟแต่ละครั้งจะมีความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปหลังจากการยิงและความสูงที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการของพาราโบลา

ถ้าการยิงบั้งไฟครั้งหนึ่งสามารถกำหนดสมการได้เป็น $s = 16t - t^2$ เมื่อ s แทนความสูงที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินเป็นเมตร และ t แทนเวลาที่ผ่านไปเป็นวินาทีหลังจากการยิง จงหาว่า

- 1) บั้งไฟขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาทีหลังจากการยิง และขึ้นไปได้สูงสุดเท่าไร
- 2) เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาทีหลังจากการยิง บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินกี่เมตร
- 3) เมื่อบั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน 40 เมตร จะเป็นเวลาที่กี่วินาทีหลังจากการยิงบั้งไฟ (กำหนด $\sqrt{6} \approx 2.45$)



ถ้าการยิงบั้งไฟครั้งหนึ่งสามารถกำหนดสมการได้เป็น $s = 16t - t^2$ เมื่อ s แทนความสูงที่บั้งไฟ
อยู่เหนือพื้นดินเป็นเมตร และ t แทนเวลาที่ผ่านมาเป็นวินาทีหลังจากการยิง

วิธีทำ จากสมการ $s = 16t - t^2$

เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} s &= 16t - t^2 \\ &= -(t^2 - 16t) \\ &= -[(t^2 - 16t + 8^2) - 8^2] \\ &= -[(t - 8)^2 - 64] \\ &= -(t - 8)^2 + 64 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$s = -(t - 8)^2 + 64$$

วิธีทำ จากสมการ $s = 16t - t^2$

จัดรูปใหม่จะได้ $s = -t^2 + 16t$

นั่นคือ $a = -1$, $b = 16$ และ $c = 0$

เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-1)} = 8$$

$$k = f(8) = -(8)^2 + 16(8) = -64 + 128 = 64$$

นั่นคือ $s = -(t - 8)^2 + 64$

ตัวอย่างที่ 1 การยิงบั้งไฟแต่ละครั้งจะมีความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปหลังจากการยิงและความสูงที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการของพาราโบลา

ถ้าการยิงบั้งไฟครั้งหนึ่งสามารถกำหนดสมการได้เป็น $s = 16t - t^2$ เมื่อ s แทนความสูงที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินเป็นเมตร และ t แทนเวลาที่ผ่านไปเป็นวินาทีหลังจากการยิง จงหาว่า

- 1) บั้งไฟขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาทีหลังจากการยิง และขึ้นไปได้สูงสุดเท่าไร
- 2) เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาทีหลังจากการยิง บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินกี่เมตร
- 3) เมื่อบั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน 40 เมตร จะเป็นเวลาที่กี่วินาทีหลังจากการยิงบั้งไฟ (กำหนด $\sqrt{6} \approx 2.45$)

$$s = 16t - t^2 \quad \longrightarrow \quad s = -(t - 8)^2 + 64$$



1) บั้งไฟขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาทีหลังจากการยิง และขึ้นไปได้สูงสุดเท่าไร

วิธีทำ จาก $s = -(t - 8)^2 + 64$

อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ โดย $a = -1$, $h = 8$ และ $k = 64$

สามารถกล่าวได้ว่า

- กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ
- มีจุดสูงสุดคือ $(8, 64)$
- ค่าสูงสุดคือ $s = 64$

นั่นคือ บั้งไฟขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป 8 วินาทีหลังจากการยิง
และขึ้นไปได้สูงสุด 64 เมตร



2) เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาทีหลังจากการยิง บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดินกี่เมตร

วิธีทำ จาก $s = -(t - 8)^2 + 64$

$$\text{จะได้ } s = -(7 - 8)^2 + 64$$

$$= -(-1)^2 + 64$$

$$= -1 + 64$$

$$= 63$$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาทีหลังจากการยิง

บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน 63 เมตร



3) เมื่อบั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน 40 เมตร จะเป็นเวลาที่วินาทีหลังจากการยิงบั้งไฟ
(กำหนด $\sqrt{6} \approx 2.45$)

วิธีทำ จาก $s = 16t - t^2$

$$40 = 16t - t^2$$

$$t^2 - 16t + 40 = 0$$

อยู่ในรูปแบบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว มี t เป็นตัวแปร

มีค่า $a = 1$, $b = -16$ และ $c = 40$

$$b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4(1)(40) = 96$$



3) เมื่อบั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน 40 เมตร จะเป็นเวลาที่วินาทีหลังจากการยิงบั้งไฟ
(กำหนด $\sqrt{6} \approx 2.45$)

วิธีทำ $t^2 - 16t + 40 = 0$

จากสูตร

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-16) \pm \sqrt{96}}{2(1)}$$
$$= \frac{16 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$
$$= 8 \pm 2\sqrt{6}$$
$$\approx 8 \pm 2(2.45)$$

ดังนั้น $t \approx 8 + 4.9 \approx 12.9$ หรือ $t \approx 8 - 4.9 \approx 3.1$

นั่นคือ เมื่อบั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน 40 เมตร จะเป็นเวลาประมาณ 3.1 วินาที
และ 12.9 วินาที หลังจากการยิงบั้งไฟ



คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

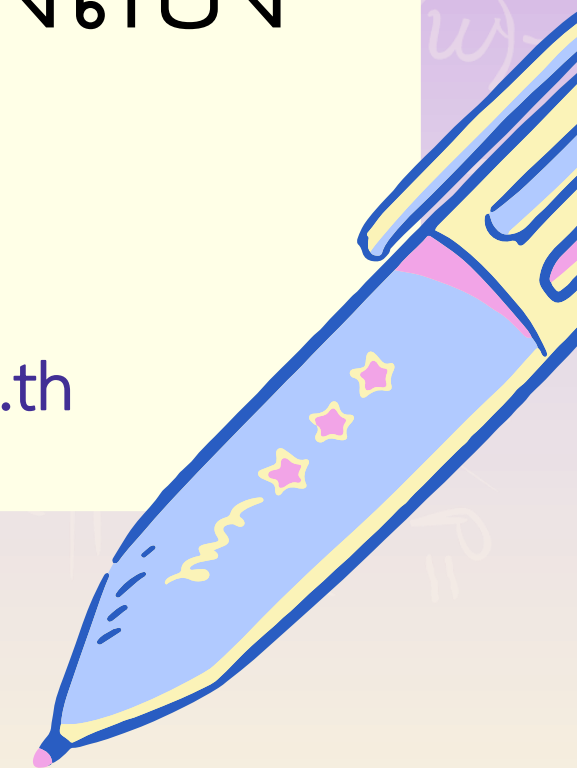
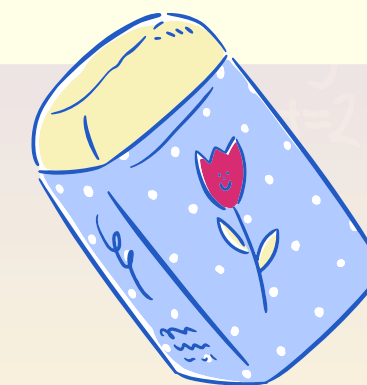
1. ธรินทร์ต้องการล้อมรั้วที่ดินที่อยู่ติดคลองให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยล้อมเพียงสามด้าน และด้านที่อยู่ติดคลองจะไม่มีรั้วกัน ถ้าธรินทร์มีวัสดุสำหรับทำรั้วได้ยาว 200 เมตร และอยากให้ได้พื้นที่ภายในรั้วมากที่สุด จงหาว่าที่ดินที่ธรินทร์ล้อมรั้วได้มีพื้นที่เท่าไร



แบบฝึกหัด 8

เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ
กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th



คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

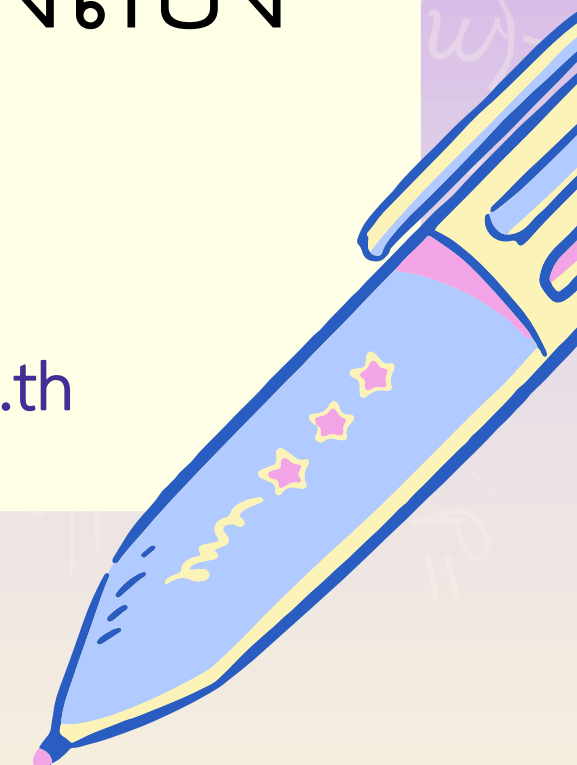
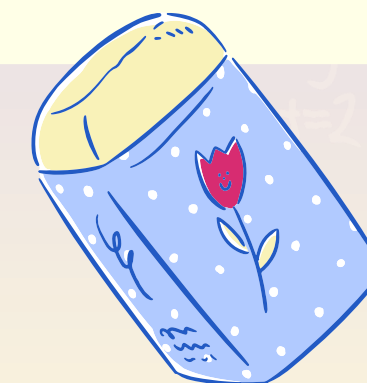
2. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความยาวรอบรูปเป็น 80 เมตร จะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อมีความกว้างและความยาวเป็นเท่าใด



แบบฝึกหัด 8

เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

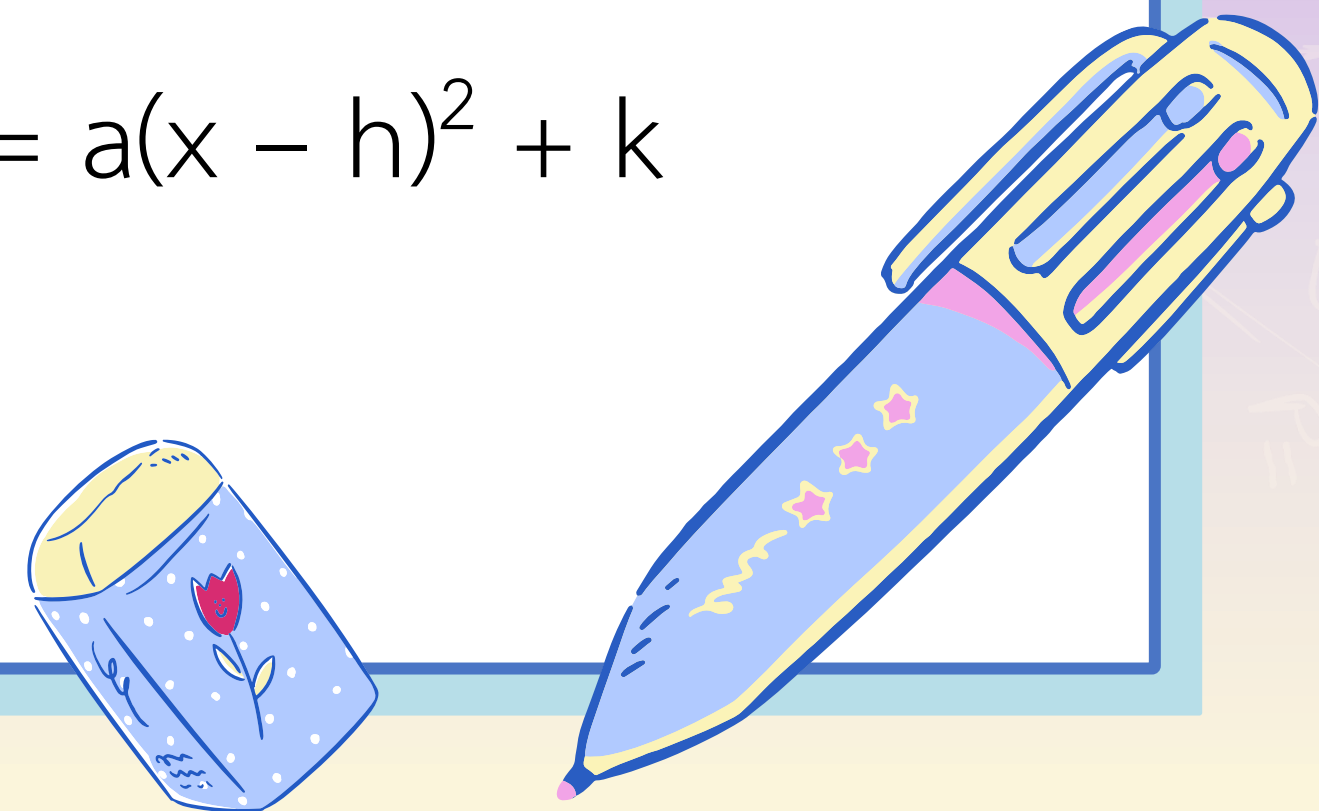




สรุป...

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง อาจทำได้
โดยวิเคราะห์ทำความเข้าใจปัญหา วาดภาพ สร้างสมการของพาราโบลา
แทนปัญหา ในกรณีที่โจทย์ไม่ได้กำหนดสมการมาให้

ในบางครั้งอาจจัดรูปสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$
เมื่อ $a \neq 0$ เพื่อช่วยในการหาคำตอบ





บทเรียนครั้งต่อไป

เรื่อง กราฟของฟังก์ชัน

กำลังสองในชีวิตจริง

ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่ www.dltv.ac.th





สิ่งที่โรงเรียนปลายทาง ต้องเตรียม

- ใบกิจกรรม 6 :

ลูกบาสในเส้นทางพาราโบลา

ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่ www.dltv.ac.th

