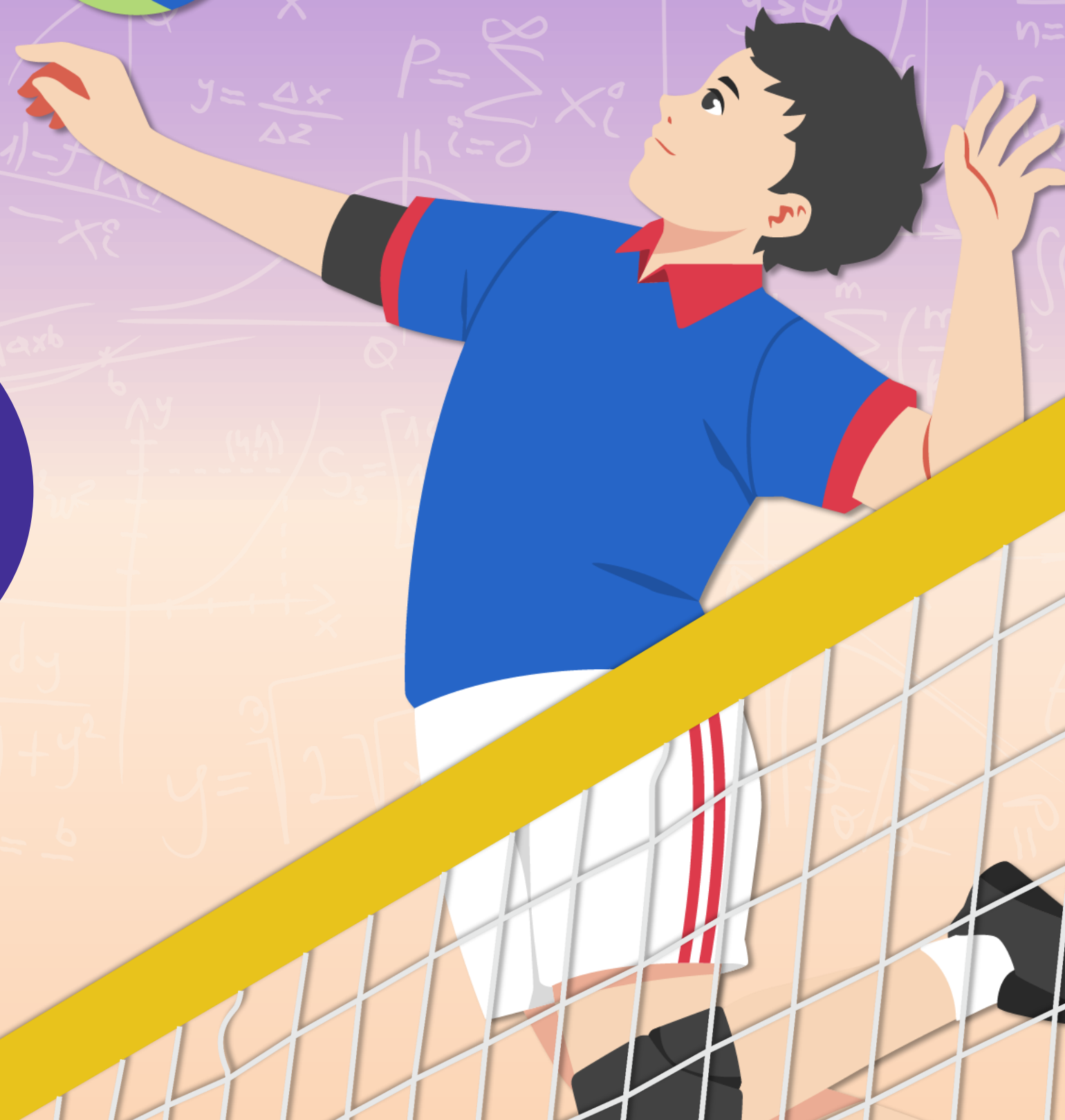


# รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค23101 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3  
หน่วยที่ 5 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

เรื่อง พาราโบลาที่กำหนดด้วย  
สมการ  $y = ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a \neq 0$

ครูผู้สอน ครูเกียรติศักดิ์ แสงทอง



พาราโบลาที่กำหนดด้วย  
สมการ  $y = ax^2 + bx + c$   
เมื่อ  $a \neq 0$





# จุดประสงค์การเรียนรู้



นักเรียนสามารถเปลี่ยนสมการพาราโบลา  
ในรูป  $y = ax^2 + bx + c$  ให้อยู่ในรูป  
 $y = a(x - h)^2 + k$  เมื่อ  $a, b, c, h, k$   
เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$  ได้



## เฉลยแบบฝึกหัด 6

เรื่อง กราฟของ  $y = a(x - h)^2 + k$

เมื่อ  $a \neq 0$



$$y = a(x - h)^2 + k$$

ค่า  $a$

ถ้า  $a > 0$  กราฟจะเป็นพาราโบลาหงาย มีจุดต่ำสุดคือ  $(h, k)$

ถ้า  $a < 0$  กราฟจะเป็นพาราโบลาคว่ำ มีจุดสูงสุดคือ  $(h, k)$

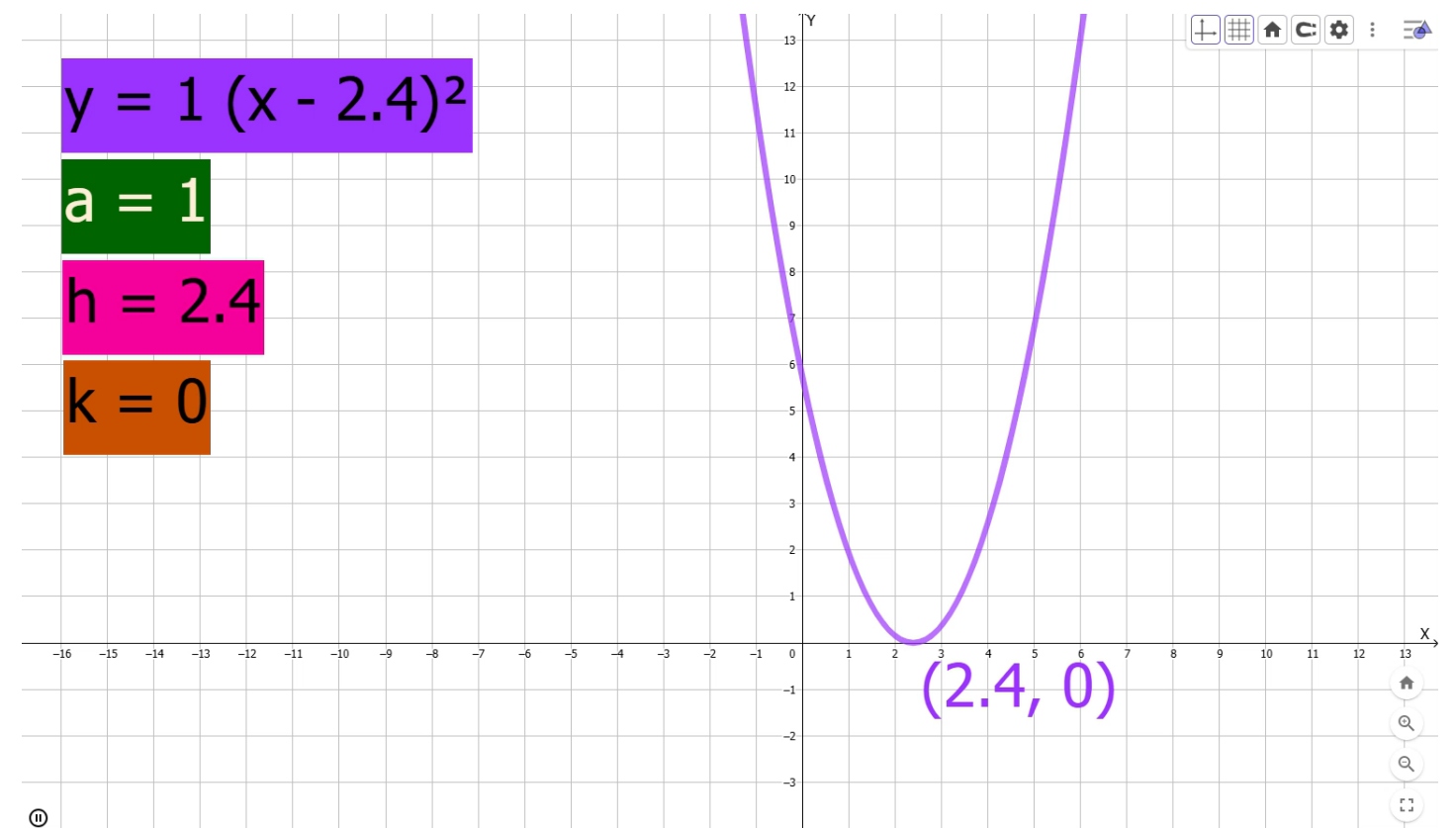
ค่า  $h$

กราฟจะเลื่อนขนานตามแนวแกน  $X$  เป็นระยะ  $|h|$  หน่วย

ถ้า  $h > 0$  กราฟจะเลื่อนขนานไปทางขวาของแกน  $Y$

ถ้า  $h < 0$  กราฟจะเลื่อนขนานไปทางซ้ายของแกน  $Y$

และ  $x = h$  เป็นแกนสมมาตรของพาราโบลา จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดมีพิกัดที่หนึ่งเป็น  $h$





$$y = a(x - h)^2 + k$$

ค่า  $a$

ถ้า  $a > 0$  กราฟจะเป็นพาราโบลาหงาย มีจุดต่ำสุดคือ  $(h, k)$

ถ้า  $a < 0$  กราฟจะเป็นพาราโบลาคว่ำ มีจุดสูงสุดคือ  $(h, k)$

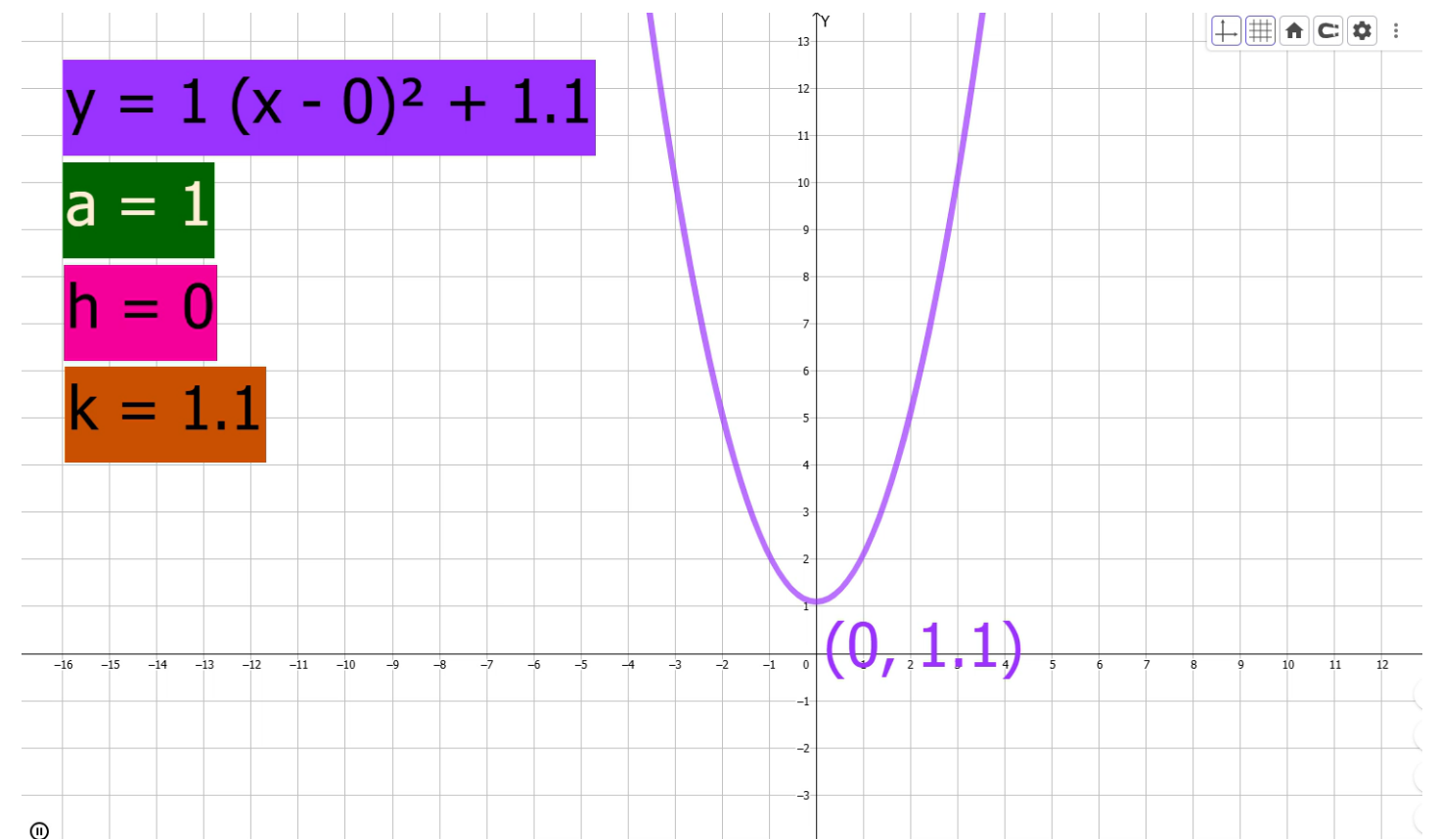
ค่า  $k$

กราฟจะเลื่อนขนานตามแนวแกน  $Y$  เป็นระยะ  $|k|$  หน่วย

ถ้า  $k > 0$  กราฟจะเลื่อนขนานไปข้างบนของแกน  $X$

ถ้า  $k < 0$  กราฟจะเลื่อนขนานลงข้างล่างของแกน  $X$

และ  $y = k$  เป็นค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดมีพิกัดที่สองเป็น  $k$



ให้  $a, b, c, h$  และ  $k$  เป็นค่าคงตัว โดยที่  $a \neq 0$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \longrightarrow \quad y = a(x - h)^2 + k$$

เป็นสมการพาราโบลา

สามารถบอกได้ว่าเป็นพาราโบลาคว่ำหรือหงาย

โดยพิจารณาจากค่า  $a$

แต่ไม่สามารถบอกรายละเอียดอื่นได้

เป็นสมการพาราโบลา

สามารถบอกได้ว่าเป็นพาราโบลาคว่ำหรือหงาย

โดยพิจารณาจากค่า  $a$

และมีจุดยอดอยู่ที่  $(h, k)$



## ตัวอย่าง 1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = 3x^2 - 6x + 5$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูป  $y = a(x - h)^2 + k$  ได้ดังนี้

$$y = 3x^2 - 6x + 5$$

$$= 3(x^2 - 2x) + 5$$

$$= 3\{[x^2 - 2(x)(1) + 1^2] - 1^2\} + 5$$

$$= 3[(x - 1)^2 - 1] + 5$$

$$= 3(x - 1)^2 - 3(1) + 5$$

$$= 3(x - 1)^2 + 2$$



## ตัวอย่าง 1 จงเขียนกราฟของสมการ $y = 3x^2 - 6x + 5$

$$y = 3x^2 - 6x + 5 \quad \longrightarrow \quad y = 3(x - 1)^2 + 2$$

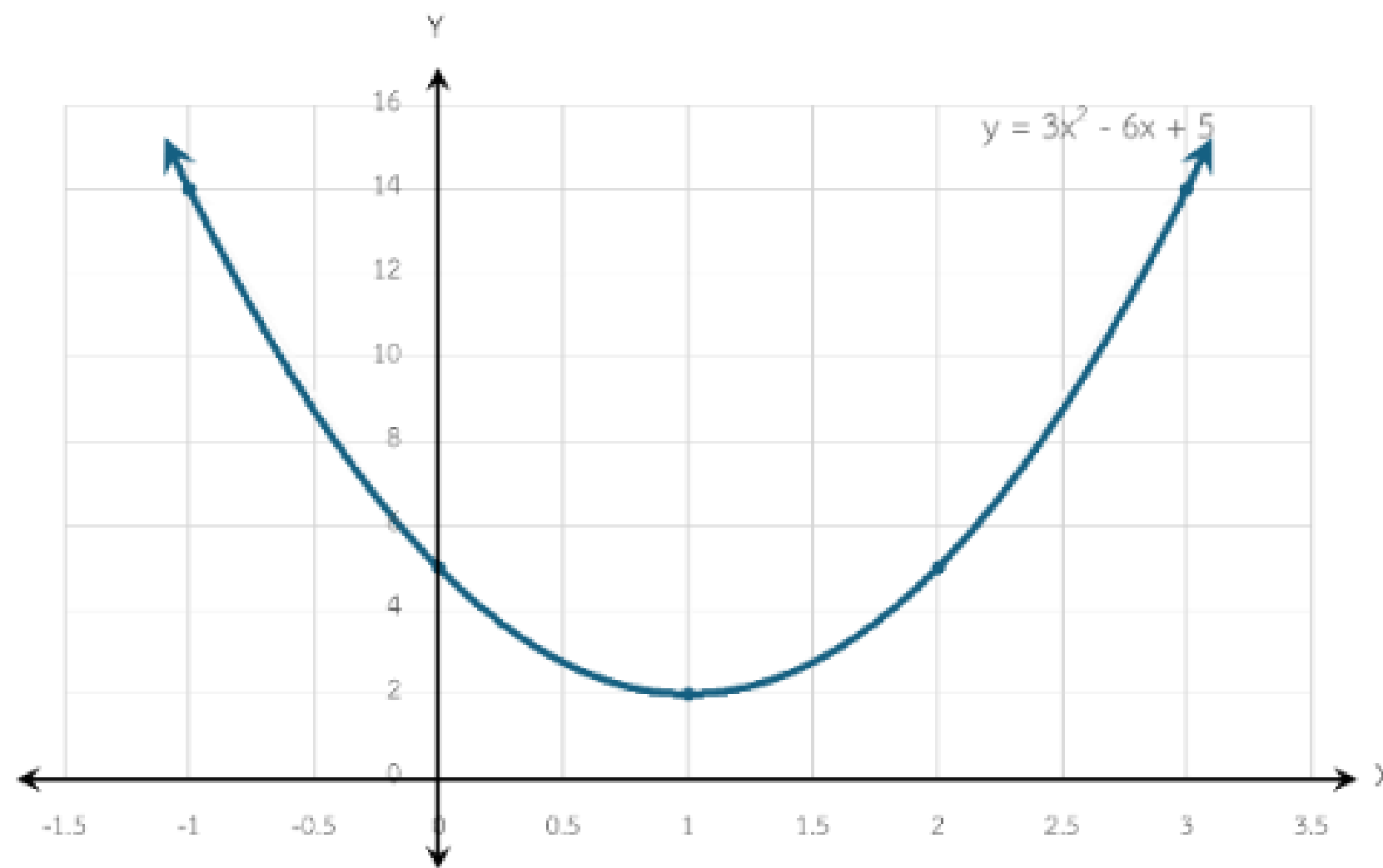
- 1) เนื่องจาก  $a > 0$  นั่นคือ กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
- 2) จุดต่ำสุดของกราฟคือ  $(h, k) = (1, 2)$
- 3) แกนสมมาตร คือ  $x = 1$
- 4) ค่าต่ำสุดของ  $y$  คือ 2
- 5) หาพิกัดของจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

| $x$                  | -1 | 0 | 1 |
|----------------------|----|---|---|
| $y = 3(x - 1)^2 + 2$ | 14 | 5 | 2 |

| $x$                  | 1 | 2 | 3  |
|----------------------|---|---|----|
| $y = 3(x - 1)^2 + 2$ | 2 | 5 | 14 |

ตัวอย่าง 1 จงเขียนกราฟของสมการ  $y = 3x^2 - 6x + 5$

$$y = 3x^2 - 6x + 5 \quad \longrightarrow \quad y = 3(x - 1)^2 + 2$$



## ตัวอย่าง 2 จงเขียนกราฟของสมการ $y = -2x^2 - 12x - 17$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูป  $y = a(x - h)^2 + k$  ได้ดังนี้

$$y = -2x^2 - 12x - 17$$

$$= -2(x^2 + 6x) - 17$$

$$= -2\{[x^2 + 2(x)(3) + 3^2] - 3^2\} - 17$$

$$= -2[(x + 3)^2 - 9] - 17$$

$$= -2(x + 3)^2 - (-2)(9) - 17$$

$$= -2(x + 3)^2 + 1$$



## ตัวอย่าง 2 จงเขียนกราฟของสมการ $y = -2x^2 - 12x - 17$

$$y = -2x^2 - 12x - 17 \longrightarrow y = -2(x + 3)^2 + 1$$

1) เนื่องจาก  $a < 0$  นั่นคือ กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ

2) จุดสูงสุดของกราฟคือ  $(h, k) = (-3, 1)$

3) แกนสมมาตร คือ  $x = -3$

4) ค่าสูงสุดของ  $y$  คือ 1

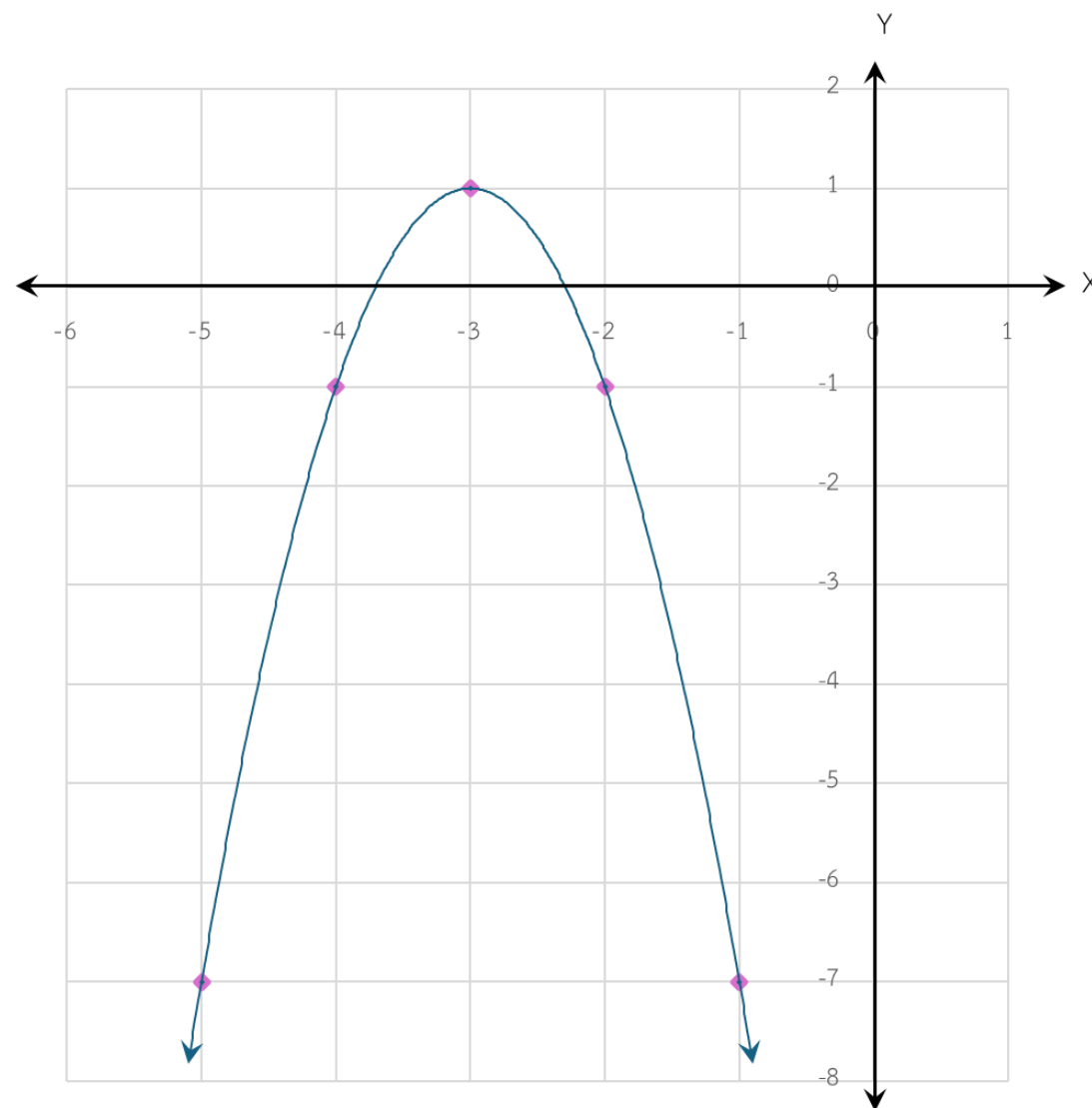
5) หาพิกัดของจุดต่าง ๆ ที่อยู่บนข้างเดียวกันของแกนสมมาตร

| $x$                  | -5 | -4 | -3 |
|----------------------|----|----|----|
| $y = 3(x - 1)^2 + 2$ | -7 | -1 | 1  |

| $x$                  | -3 | -2 | -1 |
|----------------------|----|----|----|
| $y = 3(x - 1)^2 + 2$ | 1  | -1 | -7 |

ตัวอย่าง 2 จงเขียนกราฟของสมการ  $y = -2x^2 - 12x - 17$

$$y = -2x^2 - 12x - 17 \quad \longrightarrow \quad y = -2(x + 3)^2 + 1$$





# เทคนิคในการหาค่า $h$ และ $k$

**ตัวอย่าง 1** จงเขียนกราฟของสมการ  $y = 3x^2 - 6x + 5$

$$y = 3x^2 - 6x + 5 \quad \longrightarrow \quad y = 3(x - 1)^2 + 2$$

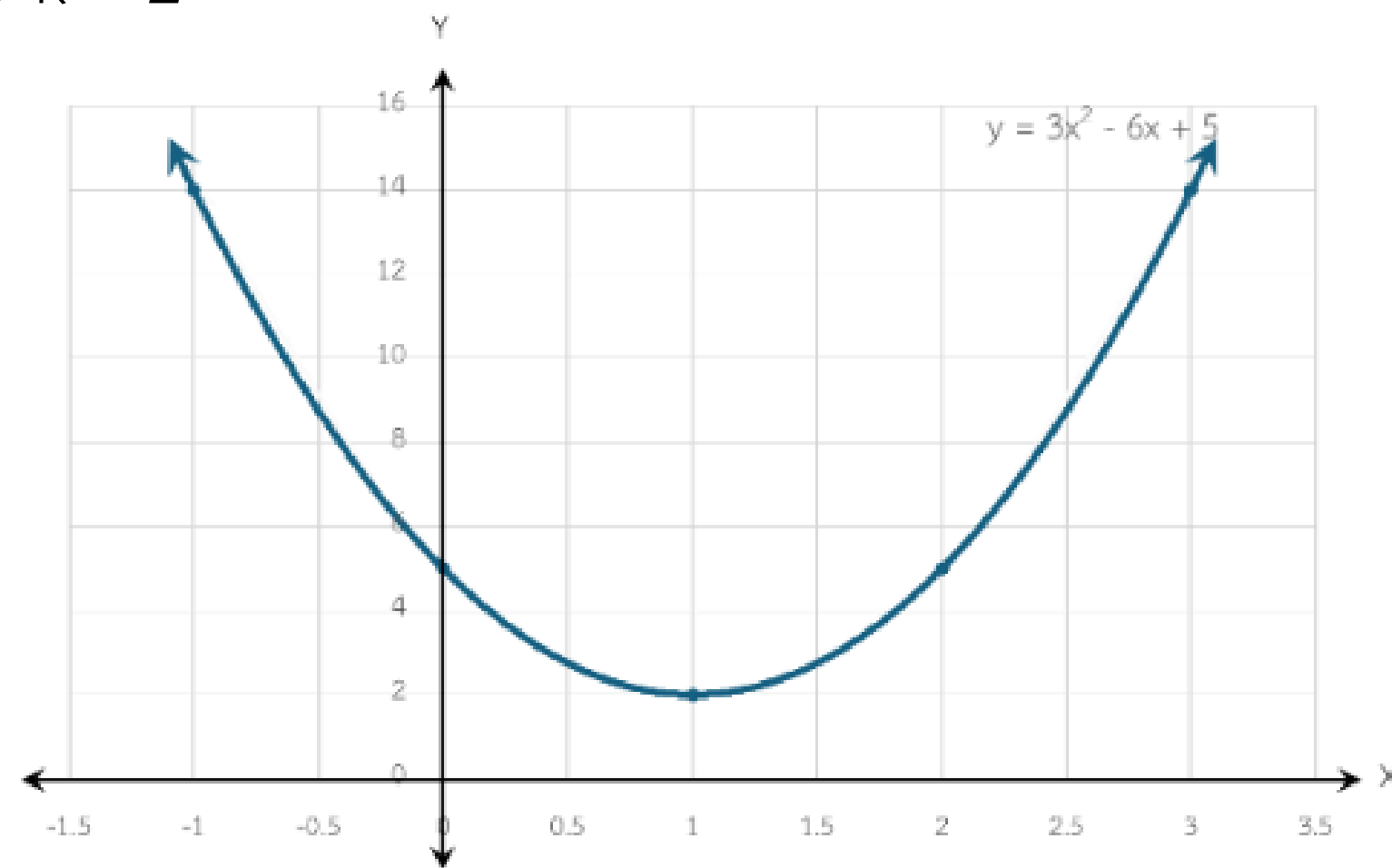
$$a = 3, b = -6 \text{ และ } c = 5$$

$$a = 3, h = 1 \text{ และ } k = 2$$

$$(h, k) = (1, 2)$$

$$\begin{aligned} h &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{(-6)}{2(3)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= f(h) \\ &= f(1) \\ &= 3(1)^2 - 6(1) + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$





# เทคนิคในการหาค่า h และ k

**ตัวอย่าง 2** จงเขียนกราฟของสมการ  $y = -2x^2 - 12x - 17$

$$y = -2x^2 - 12x - 17 \quad \longrightarrow \quad y = -2(x + 3)^2 + 1$$

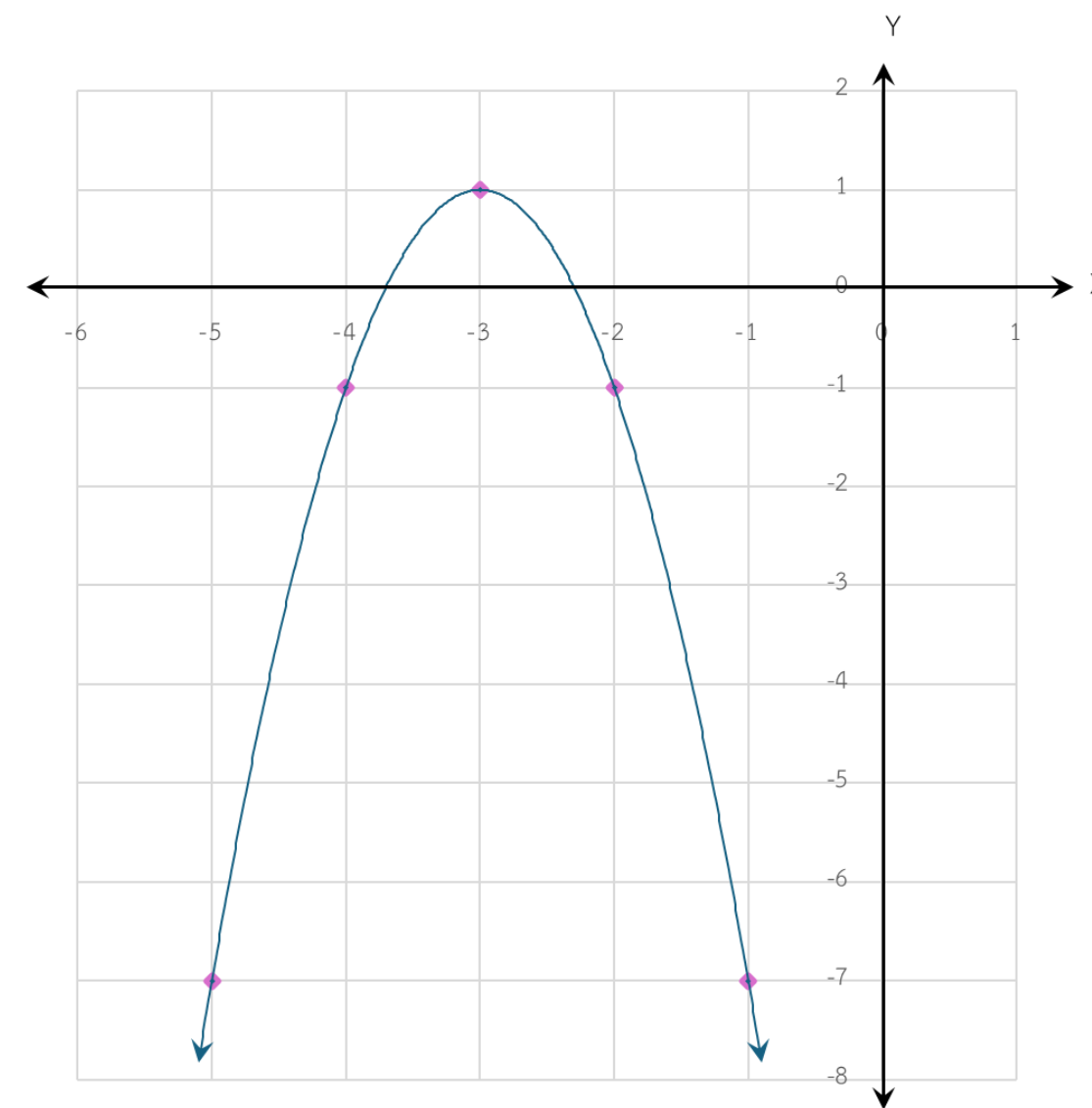
$$a = -2, b = -12 \text{ และ } c = -17$$

$$a = -2, h = -3 \text{ และ } k = 1$$

$$\begin{aligned} h &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{(-12)}{2(-2)} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= f(h) \\ &= f(-3) \\ &= 2(-3)^2 - 12(-3) - 17 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(h, k) = (-3, 1)$$



ให้  $a, b, c, h$  และ  $k$  เป็นค่าคงตัว โดยที่  $a \neq 0$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \longrightarrow \quad y = a(x - h)^2 + k$$

ใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์  
ในการจัดรูป

เป็นสมการพาราโบลา

สามารถบอกได้ว่าเป็นพาราโบลาคว่ำหรือหงาย

โดยพิจารณาจากค่า  $a$

แต่ไม่สามารถบอกรายละเอียดอื่นได้

เป็นสมการพาราโบลา

สามารถบอกได้ว่าเป็นพาราโบลาคว่ำหรือหงาย

โดยพิจารณาจากค่า  $a$

และมีจุดยอดอยู่ที่  $(h, k)$

$$h = -\frac{b}{2a}$$

$$k = f(h)$$



แบบฝึกหัด 7 : กราฟของ  $y = ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a \neq 0$   
หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง  
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23101 ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. ให้นักเรียนเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

1)  $y = x^2 + 6x + 8$

2)  $y = -x^2 - 4x - 2$



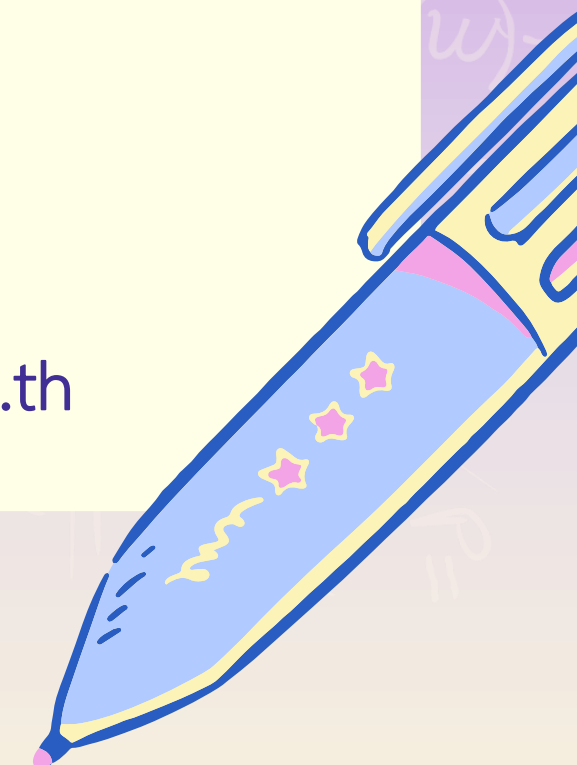
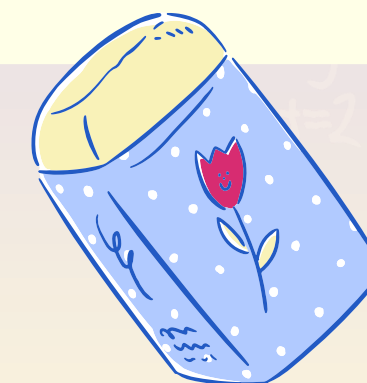
# แบบฝึกหัด 7

เรื่อง กราฟของ

$$y = ax^2 + bx + c$$

เมื่อ  $a \neq 0$

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th)



2. จงพิจารณาแต่ละสมการต่อไปนี้ แล้วตอบคำถาม โดยไม่ต้องเขียนกราฟ

สมการที่ 1 :  $y = x^2 - 6x$

สมการที่ 2 :  $y = -x^2 - 6x$

สมการที่ 3 :  $y = -x^2 + 6x - 5$

สมการที่ 4 :  $y = 2x^2 + 5x + 2$

- 1) กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำหรือพาราโบลาหงาย
- 2) จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟเป็นจุดใด
- 3) ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ  $y$  เป็นเท่าใด
- 4) เส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร
- 5) กราฟตัดแกน  $X$  และแกน  $Y$  ที่จุดใด



# แบบฝึกหัด 7

เรื่อง กราฟของ

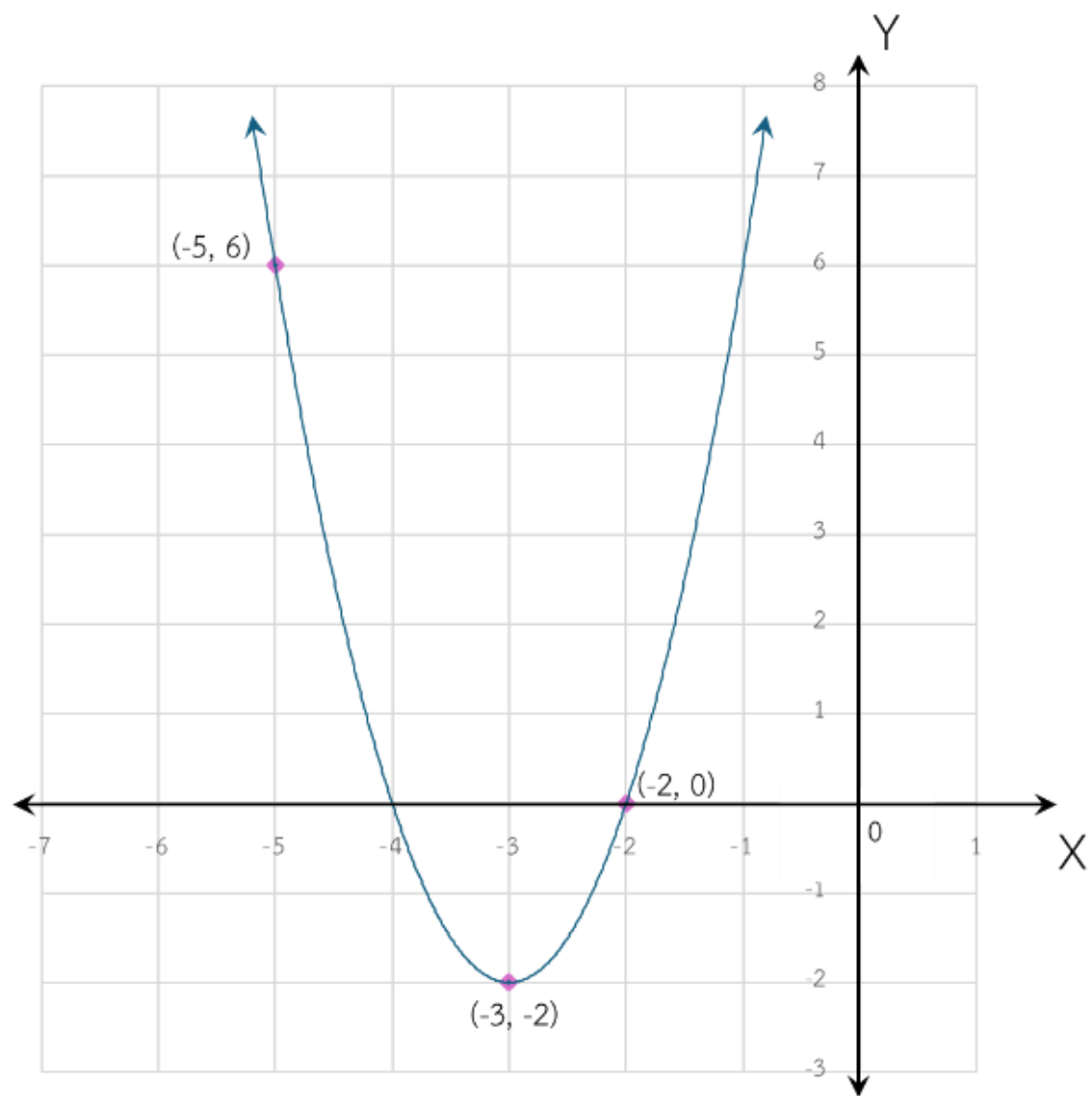
$$y = ax^2 + bx + c$$

เมื่อ  $a \neq 0$

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th)



3. กราฟของพาราโบลาที่ผ่านจุด  $(-5, 6)$ ,  $(-3, -2)$  และ  $(-2, 0)$   
ตั้งรูป มีสมการเป็นอย่างไร จงเขียนสมการของพาราโบลานั้น  
ให้อยู่ในรูป  $y = ax^2 + bx + c$



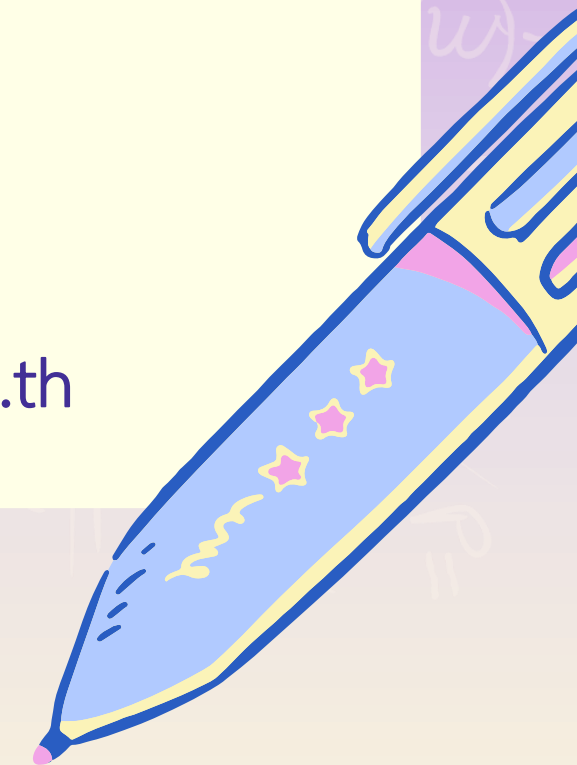
## แบบฝึกหัด 7

เรื่อง กราฟของ

$$y = ax^2 + bx + c$$

เมื่อ  $a \neq 0$

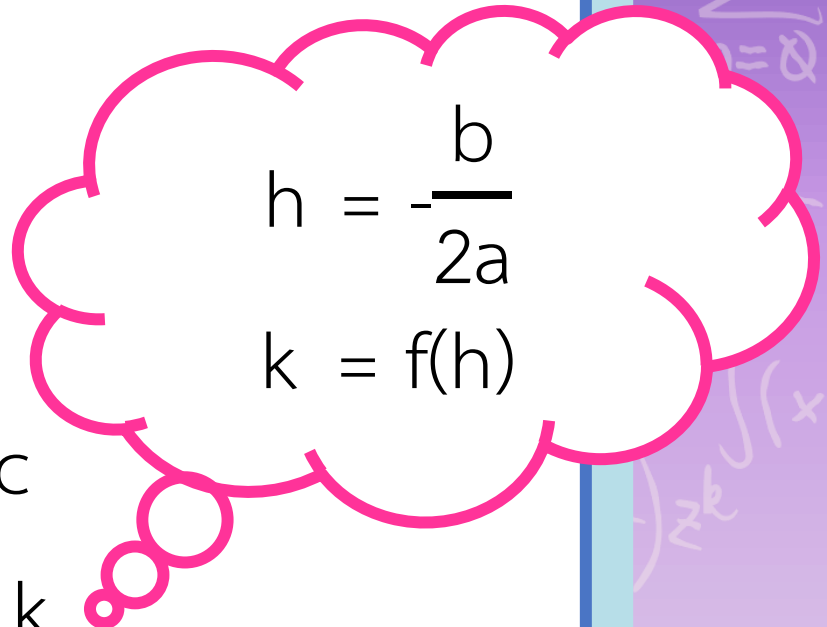
สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th)



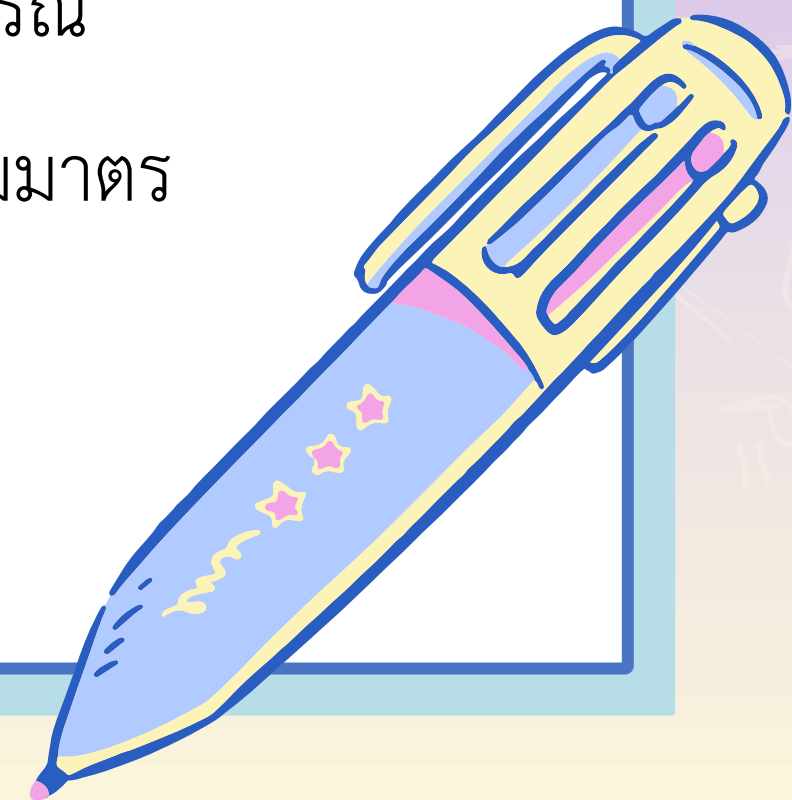
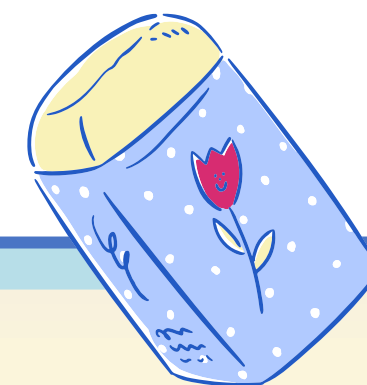


# สรุป... กราฟของสมการ $y = ax^2 + bx + c$

## เมื่อ $a \neq 0$


$$h = -\frac{b}{2a}$$
$$k = f(h)$$

การบอกลักษณะของพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ  $y = ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$  ทำได้โดยการเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป  $y = a(x - h)^2 + k$  เมื่อ  $h$ ,  $k$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$  โดยการทำบางส่วนของสมการให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งช่วยบอกลักษณะของกราฟ จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และแกนสมมาตร จะทำให้เขียนกราฟของ  $y = ax^2 + bx + c$  ได้สะดวกขึ้น

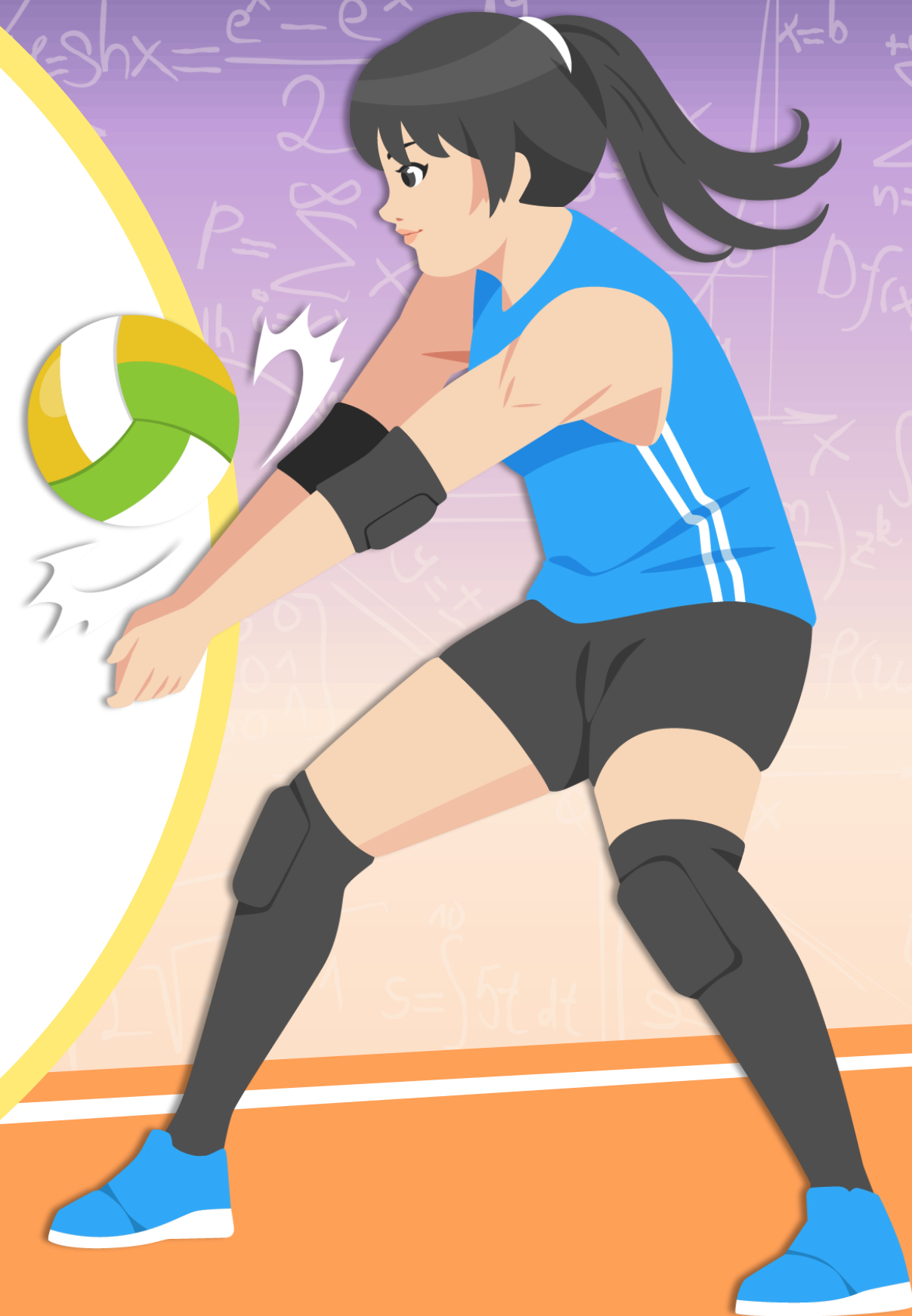




# บทเรียนครั้งต่อไป

เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ  
กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th)





# สิ่งที่โรงเรียนปลายทาง ต้องเตรียม

- แบบฝึกหัด 8 : โจทย์ปัญหา  
เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน  
กำลังสอง

ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th)

