รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา **ค23101** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

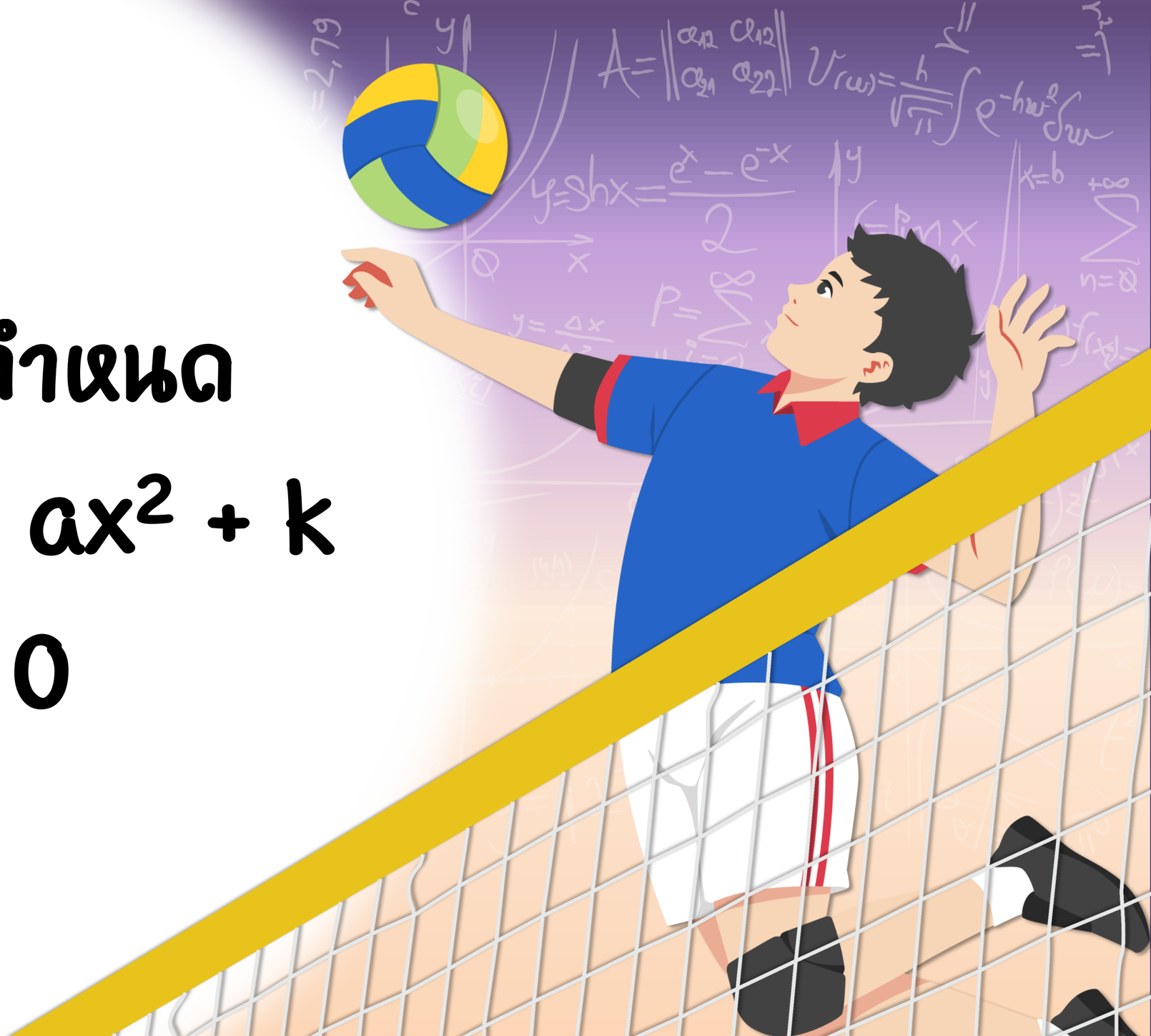
หน่วยที่ 5 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

<u>เรื่อง</u> พาราโบลาที่กำหนด

ด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

ครูผู้สอน ครูเกียรติศักดิ์ แสงทอง

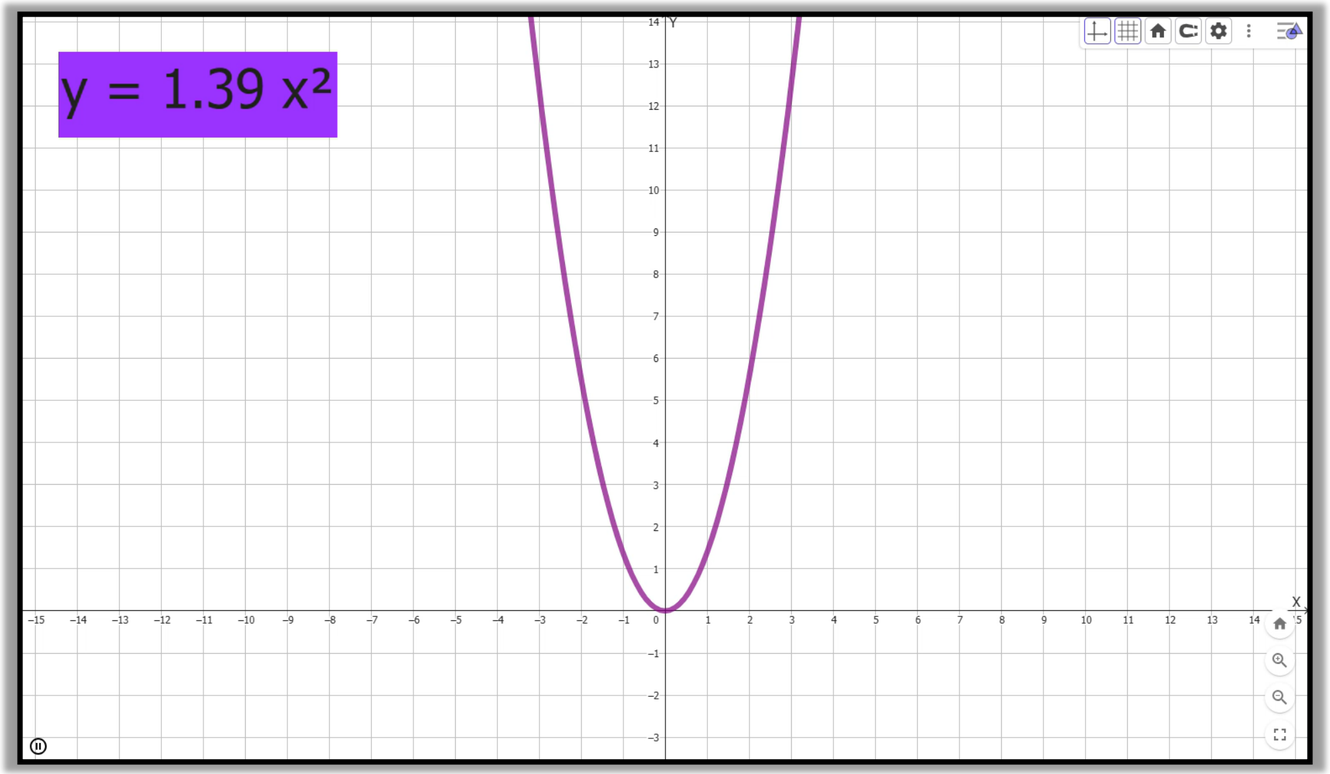
พาราโบลาที่กำหนด
ด้วยสมการ $y = ax^2 + k$
เมื่อ $a \neq 0$



จุดประสงค์การเรียนรู้

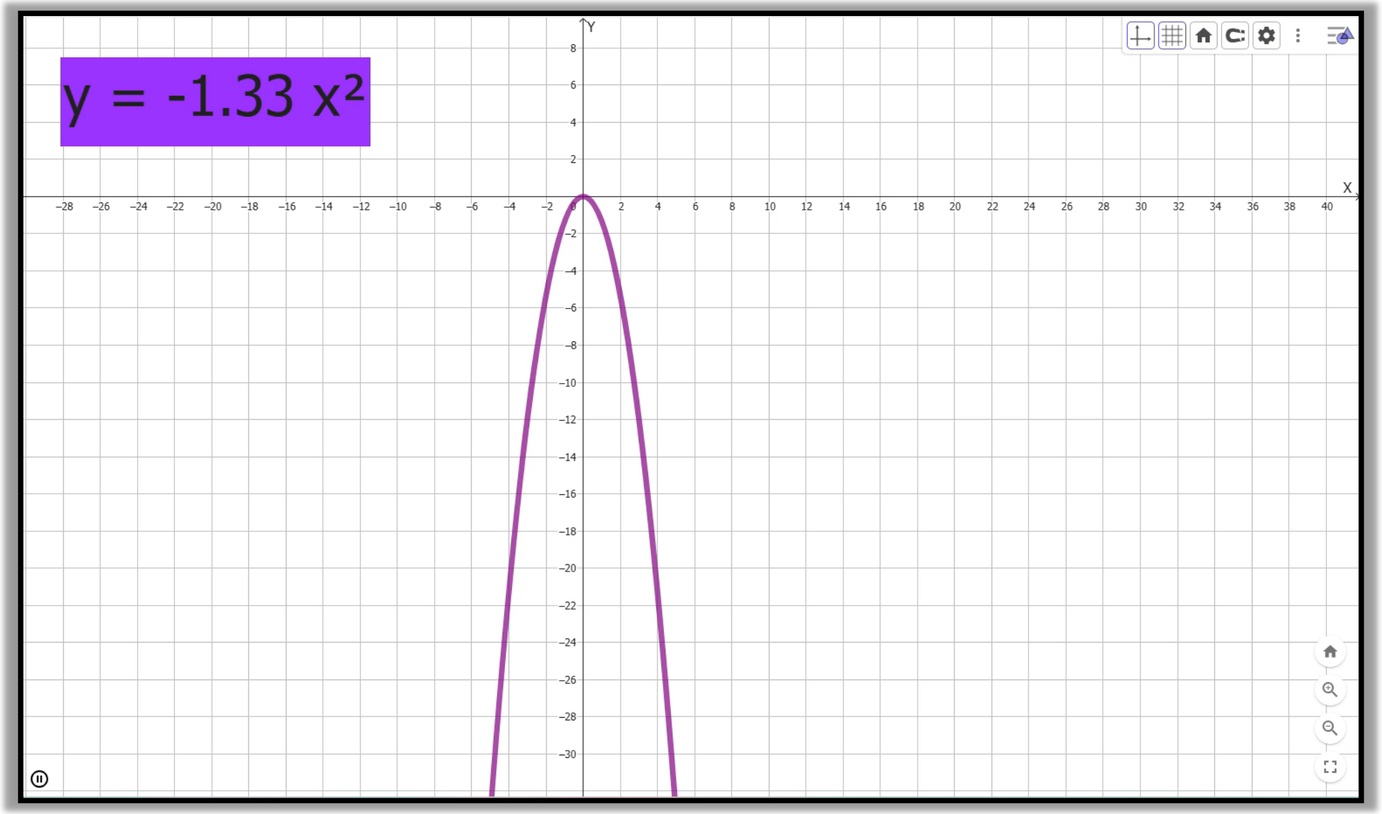
นักเรียนสามารถอธิบายลักษณะของพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ ได้

พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a > 0$ มีลักษณะอย่างไร



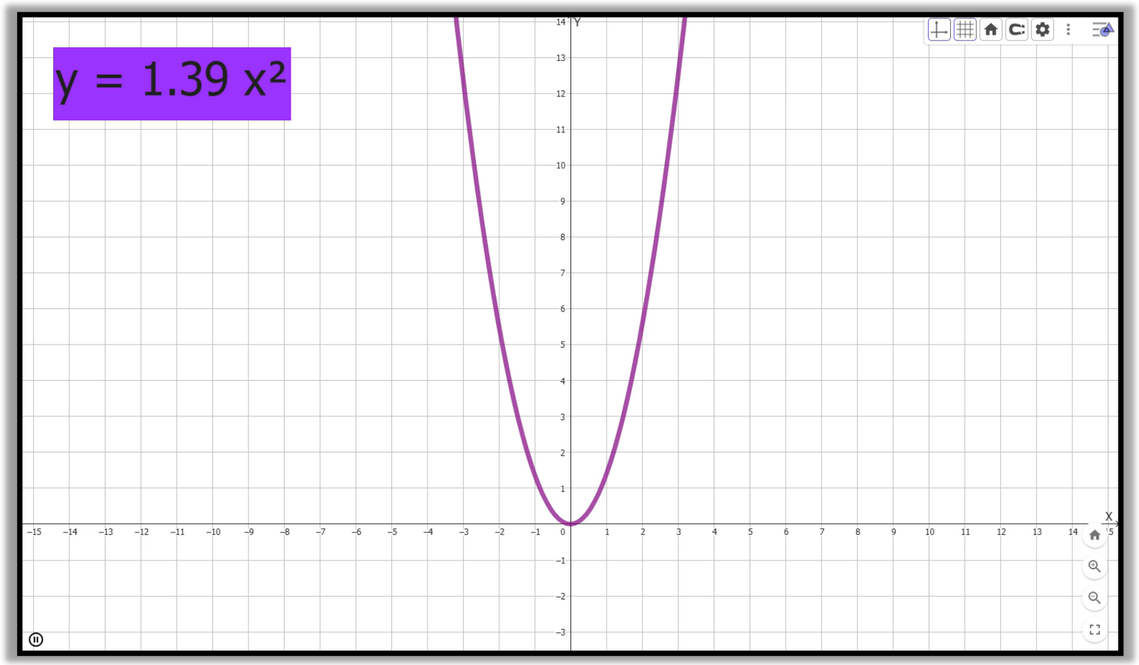
พาราโบลาหงาย มีจุดต่ำสุด คือ (0, 0) มีแกนสมมาตรคือ แกน Y

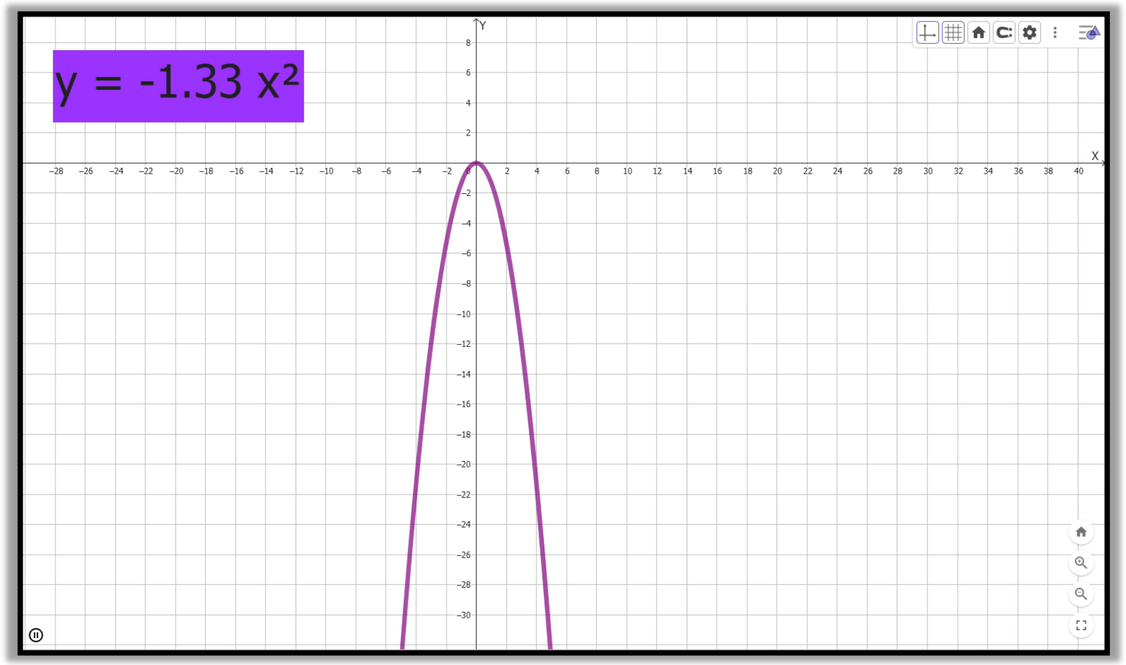
พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a < 0$ มีลักษณะอย่างไร



พาราโบลาคว่ำ มีจุดสูงสุด คือ (0, 0) มีแกนสมมาตรคือ แกน Y

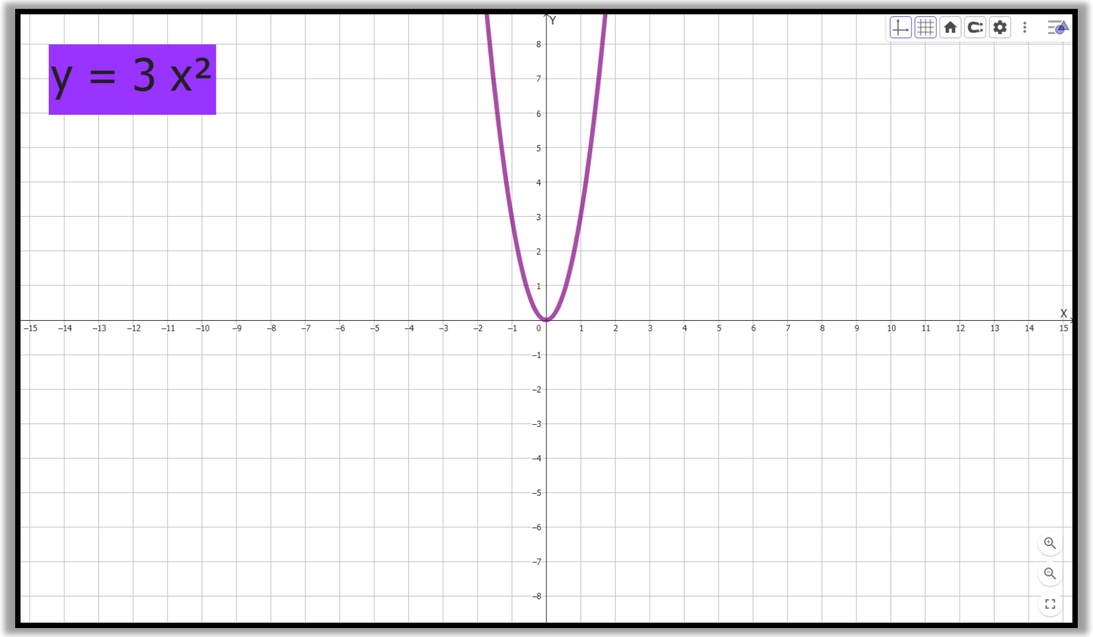
ค่า |a| ส่งผลกับความบานของพาราโบลาอย่างไร

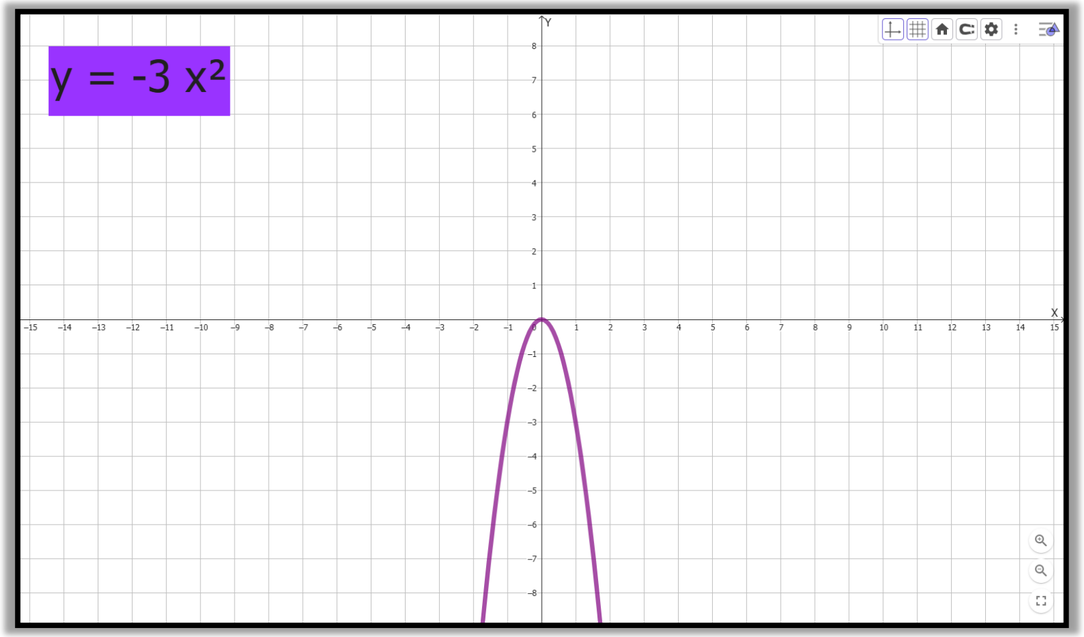




|a| ยิ่งมาก กราฟจะบานน้อย แต่ถ้า |a| ยิ่งน้อย กราฟจะบานมาก

พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = 3x^2$ และ $y = -3x^2$ มีลักษณะใดที่เหมือนกัน และมีลักษณะใดที่ต่างกัน

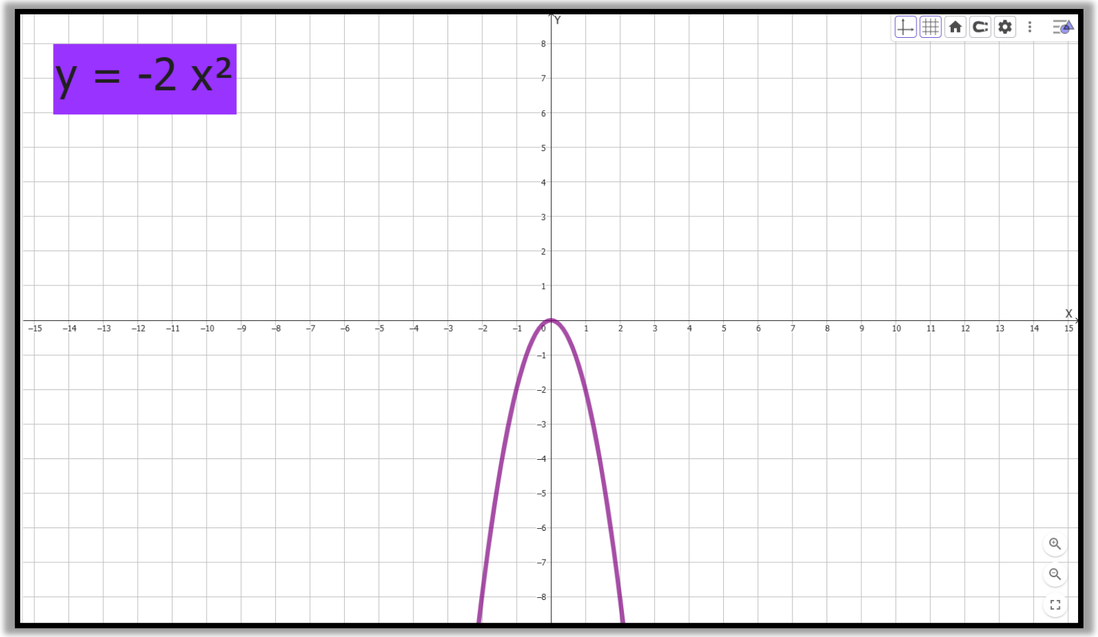


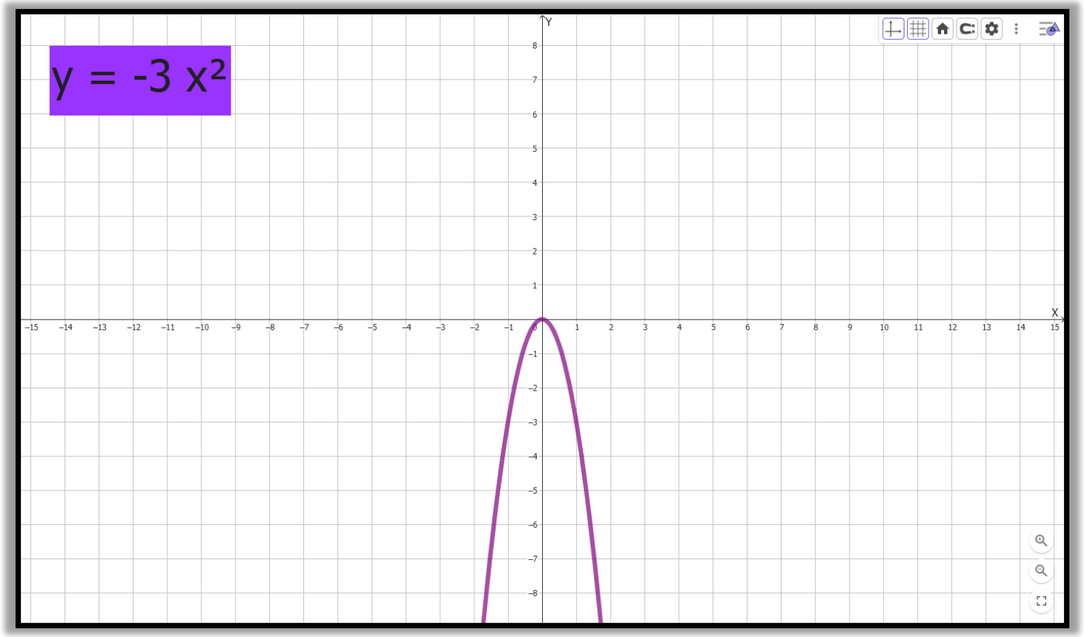


ลักษณะที่เหมือนกันคือ มีความบานที่เหมือนกัน มีจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดเป็นจุดเดียวกัน และมีแกนสมมาตรแกนเดียวกัน

ลักษณะที่ต่างกันคือ $y = 3x^2$ เป็นพาราโบลาหงาย แต่ $y = -3x^2$ เป็นพาราโบลาคว่ำ

พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = -2x^2$ และ $y = -3x^2$ มีลักษณะใดที่เหมือนกัน และมีลักษณะใดที่แตกต่างกัน



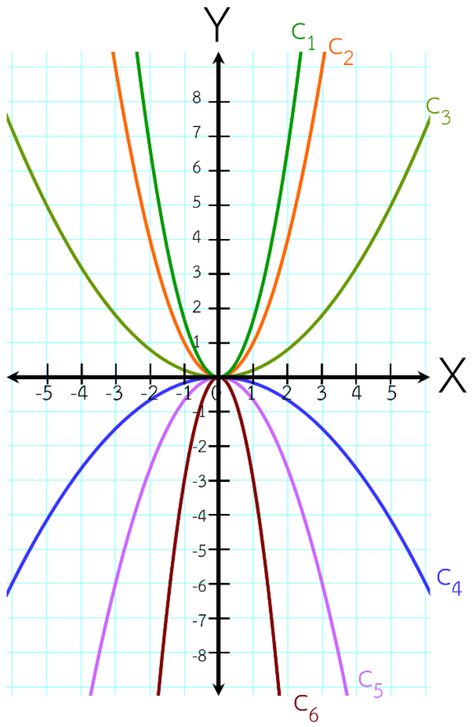


ลักษณะที่เหมือนกันคือ เป็นพาราโบลาคว่ำ มีจุดสูงสุดที่จุด (0, 0) มีแกนสมมาตรคือแกน Y

ลักษณะที่ต่างกันคือ กราฟของ $y = -3x^2$ จะบานน้อยกว่ากราฟของ $y = -2x^2$

เฉลยแบบฝึกหัด 3

จงพิจารณาว่าพาราโบลา c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 และ c_6 เป็นกราฟของสมการใดต่อไปนี้



c_6 1) $y = -3x^2$

c_2 2) $y = x^2$

c_5 3) $y = -\frac{2}{3}x^2$

c_3 4) $y = \frac{1}{5}x^2$

c_4 5) $y = -\frac{1}{6}x^2$

c_1 6) $y = \frac{5}{3}x^2$

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

$y = ax^2 + k$ เมื่อ a และ k เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

ถ้า k = 0 จะได้สมการเป็นอย่างไร และมีกราฟอย่างไร

จะได้สมการเป็น $y = ax^2$ ซึ่งได้กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำหรือหงาย ขึ้นอยู่กับค่า a

ถ้าให้ a = -2 และ k = 1 จะได้สมการอย่างไร

$y = -2x^2 + 1$

ถ้าสมการอยู่ในรูป $y = 4x^2 - 3$ มีค่า a และ k เท่าไร

a = 4, k = -3

ใบกิจกรรม 3

<u>เรื่อง</u> สำรวจกราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

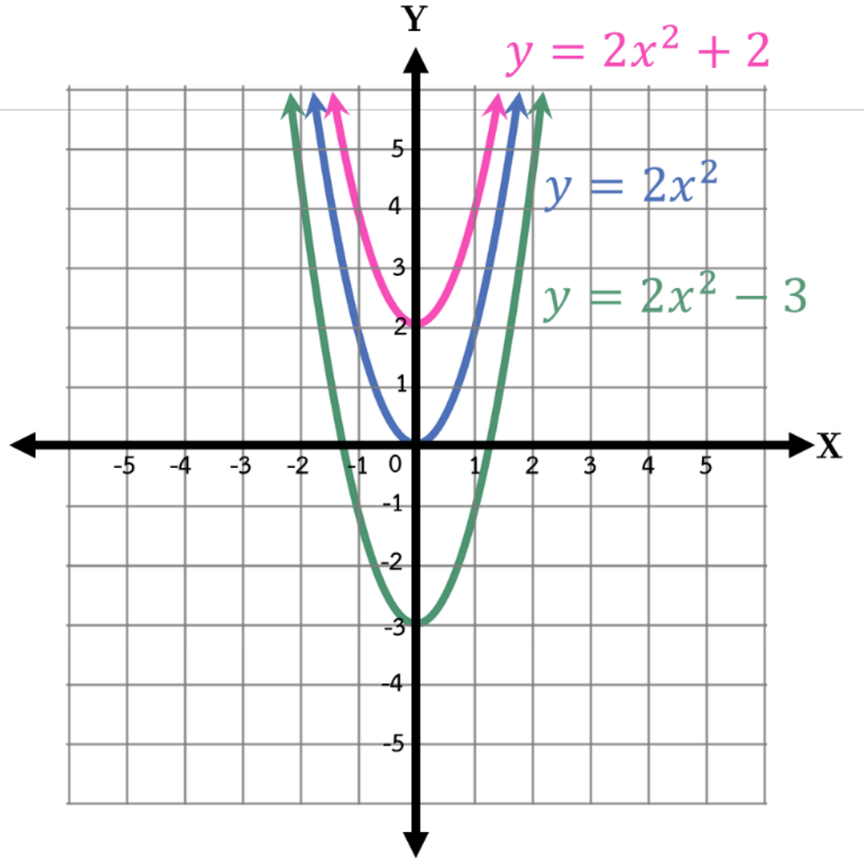
ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 1 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$

1. ให้นักเรียนพิจารณากราฟของพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$ ดังต่อไปนี้

กำหนดสมการของพาราโบลา $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 2$ และ $y = 2x^2 - 3$

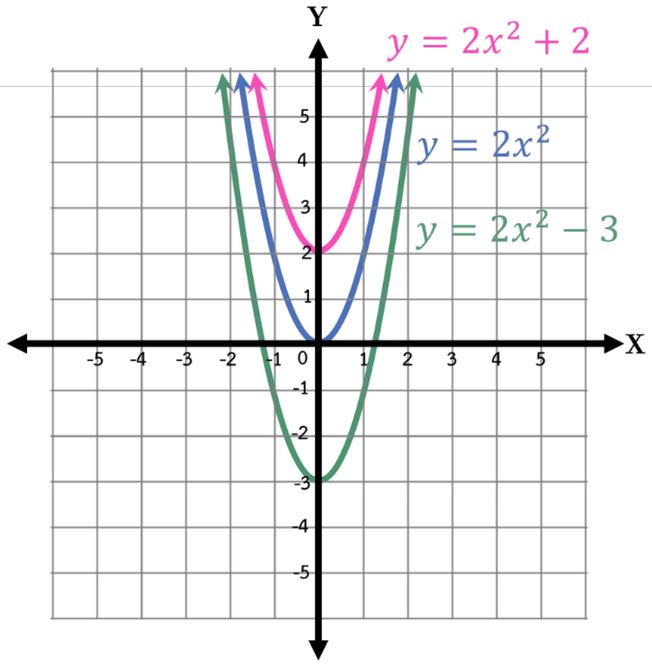
เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสามโดยใช้แกนคู่เดียวกันจะได้ดังรูป



สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 1 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

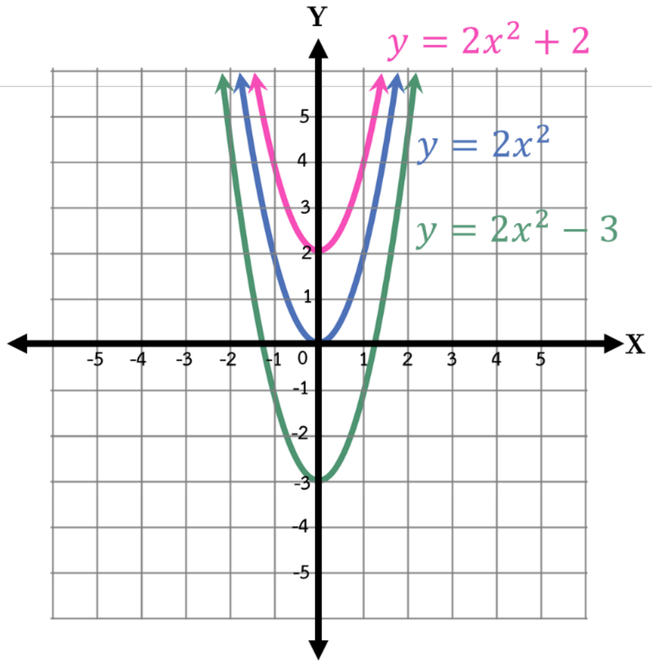
1) นักเรียนคิดว่า กราฟทั้งสามเส้นเท่ากันทุกประการหรือไม่ หลังจากนั้นให้นักเรียนนำกระดาษลอกลายลอกกราฟเส้นหนึ่งเส้นใดก็ได้ แล้วนำไปซ้อนกับกราฟอีกสองเส้นที่เหลือ เพื่อตรวจสอบว่าตรงกับสิ่งที่นักเรียนคิดหรือไม่

เท่ากันทุกประการ

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 1 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

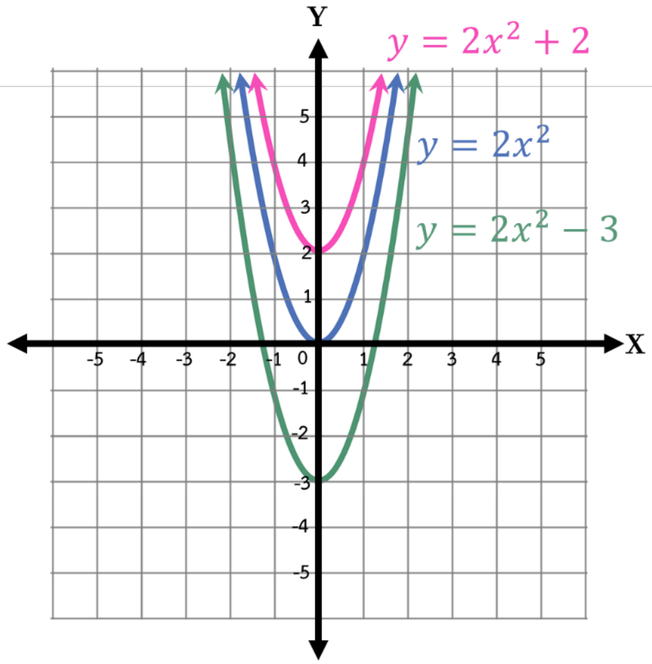
2) กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

เส้นตรง x = 0 หรือแกน Y

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 1 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

3) จุดต่ำสุดของแต่ละกราฟคือจุดใด และค่าต่ำสุดของ y ในแต่ละสมการเป็นเท่าใด

จุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = 2x^2$ คือ (0, 0) และค่าต่ำสุดของ y เป็น 0

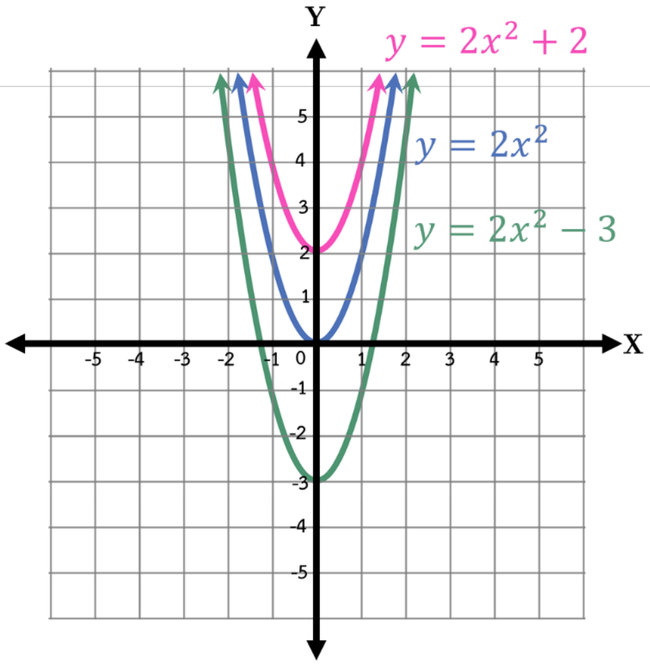
จุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = 2x^2 + 2$ คือ (0, 2) และค่าต่ำสุดของ y เป็น 2

จุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = 2x^2 - 3$ คือ (0, -3) และค่าต่ำสุดของ y เป็น -3

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 1 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

4) จุดต่ำสุดของกราฟของสมการใดอยู่เหนือแกน X และจุดต่ำสุดของกราฟของสมการใดอยู่ใต้แกน X

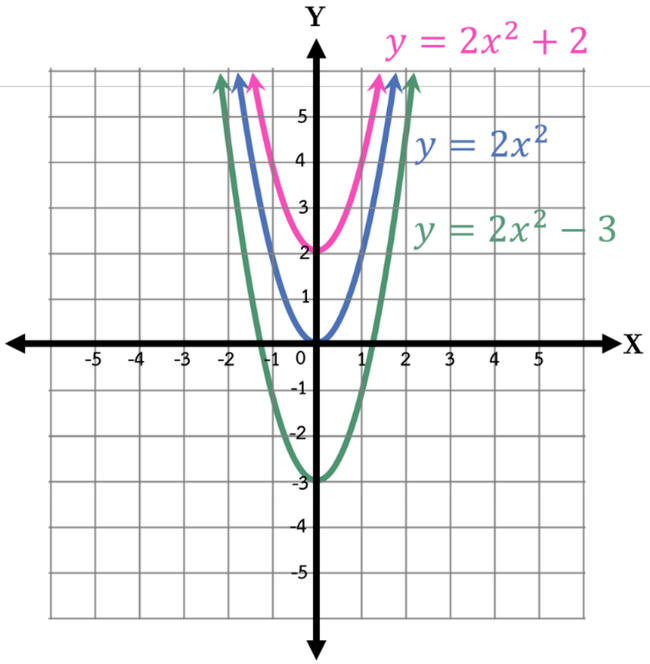
จุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = 2x^2 + 2$ อยู่เหนือแกน X

และจุดต่ำสุดของกราฟของสมการ $y = 2x^2 - 3$ อยู่ใต้แกน X

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 1 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

5) ถ้าให้กราฟของสมการ $y = 2x^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = 2x^2 + 2$ และ $y = 2x^2 - 3$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = 2x^2$ อย่างไร จงอธิบาย

กราฟของสมการ $y = 2x^2 + 2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = 2x^2$ ตามแนวแกน Y ขึ้นไป เป็นระยะ 2 หน่วย และ

กราฟของสมการ $y = 2x^2 - 3$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = 2x^2$ ตามแนวแกน Y ลงมา เป็นระยะ 3 หน่วย

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

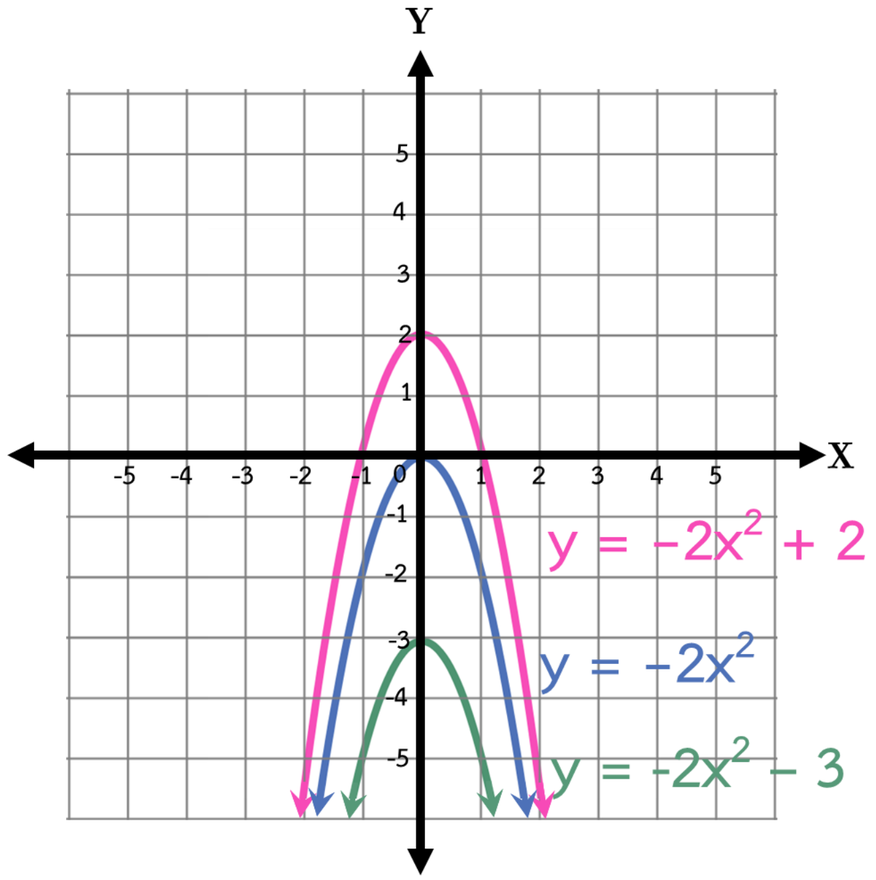
ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 2 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$

1. ให้นักเรียนพิจารณากราฟของพาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a < 0$ ดังต่อไปนี้

กำหนดสมการของพาราโบลา $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 2$ และ $y = -2x^2 - 3$

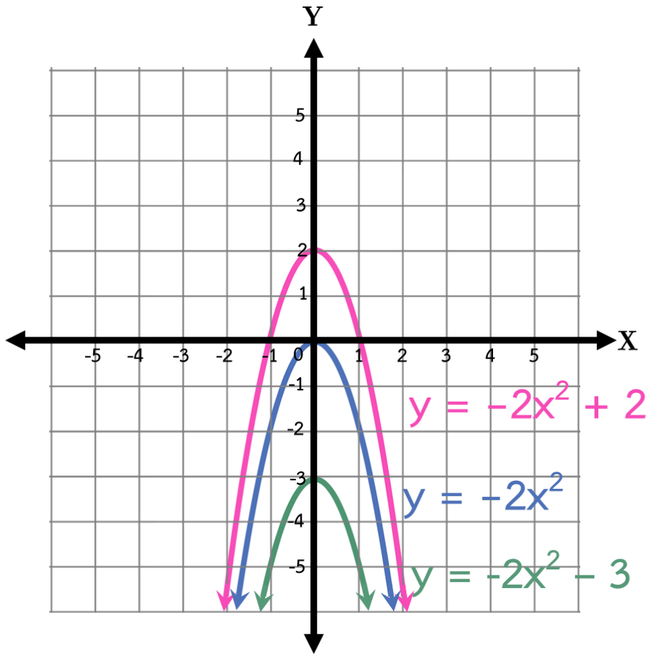
เมื่อเขียนกราฟของสมการทั้งสามโดยใช้แกนคู่เดียวกันจะได้ดังรูป



สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 2 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1) นักเรียนคิดว่า กราฟทั้งสามเส้นเท่ากันทุกประการหรือไม่ หลังจากนั้นให้นักเรียนนำกระดาษลอกลายลอกกราฟเส้นหนึ่งเส้นใดก็ได้ แล้วนำไปซ้อนกับกราฟอีกสองเส้นที่เหลือ เพื่อตรวจสอบว่าตรงกับสิ่งที่นักเรียนคิดหรือไม่

เท่ากันทุกประการ

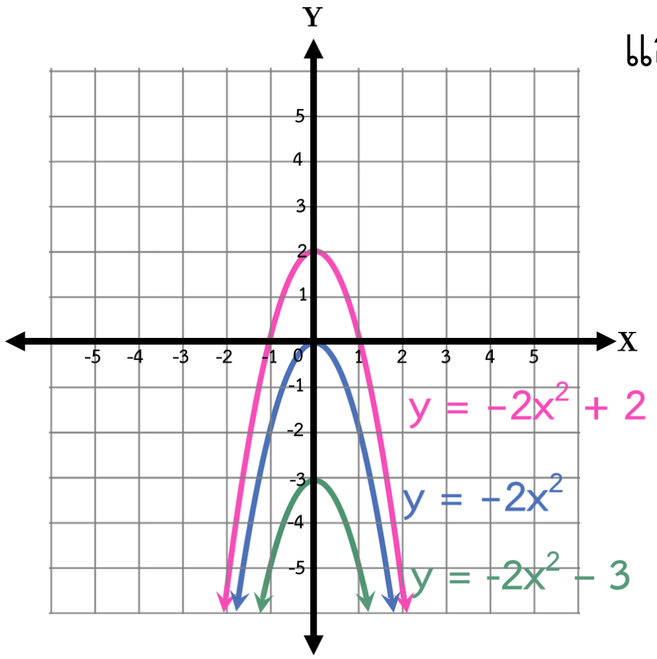
2) กราฟทั้งสามมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

เส้นตรง $x = 0$ หรือแกน Y

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 2 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

3) จุดสูงสุดของแต่ละกราฟคือจุดใด และค่าสูงสุดของ y ในแต่ละสมการเป็นเท่าใด

จุดสูงสุดของกราฟของสมการ $y = -2x^2$ คือ (0, 0) และค่าสูงสุดของ y เป็น 0

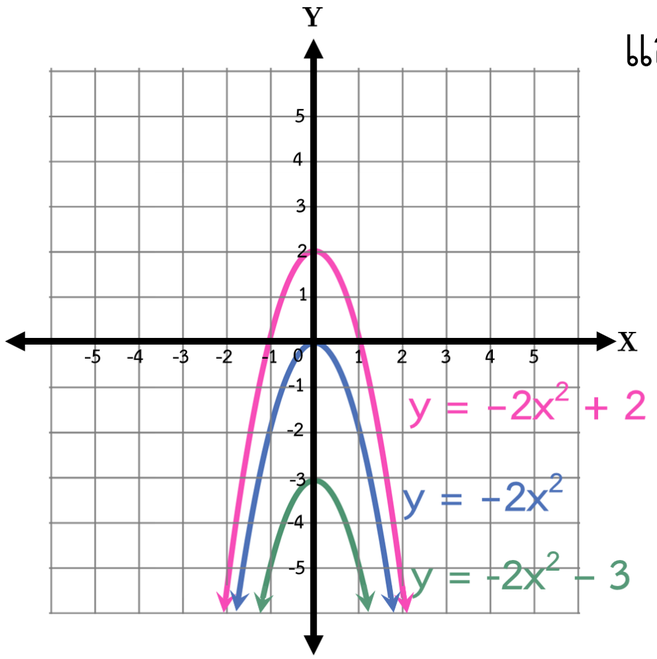
จุดสูงสุดของกราฟของสมการ $y = -2x^2 + 2$ คือ (0, 2) และค่าสูงสุดของ y เป็น 2

จุดสูงสุดของกราฟของสมการ $y = -2x^2 - 3$ คือ (0, -3) และค่าสูงสุดของ y เป็น -3

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 2 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

4) จุดสูงสุดของกราฟของสมการใดอยู่เหนือแกน X และจุดสูงสุดของกราฟของสมการใดอยู่ใต้แกน X

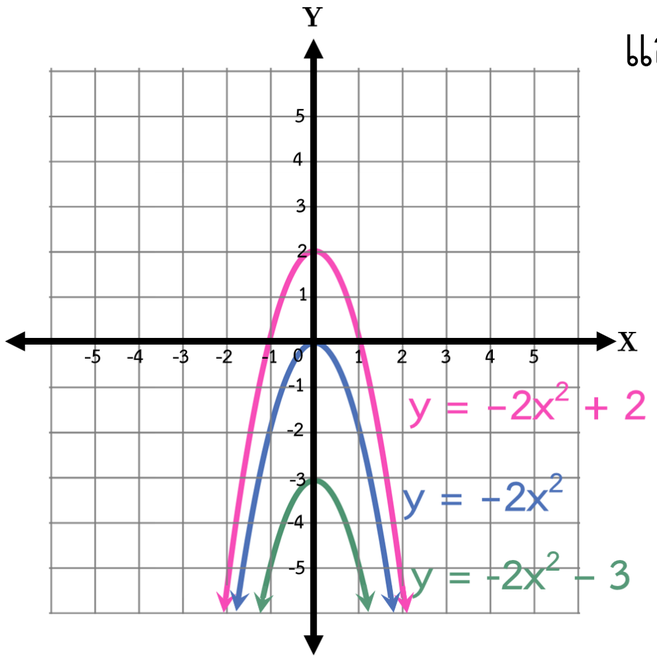
จุดสูงสุดของกราฟของสมการ $y = -2x^2 + 2$ อยู่เหนือแกน X

และจุดสูงสุดของกราฟของสมการ $y = -2x^2 - 3$ อยู่ใต้แกน X

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

ใบกิจกรรม 3

ตอนที่ 2 กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$



2. จากสมการของพาราโบลาและกราฟที่ได้ในข้อ 1 ให้นักเรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

5) ถ้าให้กราฟของสมการ $y = -2x^2$ เป็นรูปต้นแบบแล้ว กราฟของสมการ $y = -2x^2 + 2$ และ $y = -2x^2 - 3$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = -2x^2$ อย่างไร จงอธิบาย

กราฟของสมการ $y = -2x^2 + 2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = -2x^2$ ตามแนวแกน Y ขึ้นไป เป็นระยะ 2 หน่วย และ

กราฟของสมการ $y = -2x^2 - 3$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = -2x^2$ ตามแนวแกน Y ลงมา เป็นระยะ 3 หน่วย

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

สรุปความรู้ที่ได้จากการทำกิจกรรม

จากการสำรวจกราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ จะเห็นว่า คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ ดังนี้

1. กราฟเป็นพาราโบลาที่เป็นรูปสมมาตร โดยมีแกน Y (เส้นตรง $x = 0$) เป็นแกนสมมาตร

- ถ้า $a > 0$ กราฟมีลักษณะเป็น _____ มี _____ แต่ไม่มี _____
- ถ้า $a < 0$ กราฟมีลักษณะเป็น _____ มี _____ แต่ไม่มี _____

2. กราฟจะบานน้อยหรือมาก ขึ้นอยู่กับค่า a กล่าวคือ

- ถ้า $|a|$ มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ กราฟจะบาน _____ ในทางกลับกัน
- ถ้า $|a|$ มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ กราฟจะบาน _____

สรุปความรู้ที่ได้จากการทำกิจกรรม

จากการสำรวจกราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ จะเห็นว่า คำตอบที่ได้เป็นไปตามลักษณะทั่วไปของกราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ ดังนี้

3. จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟอยู่ที่จุด ____ ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ y เท่ากับ ____

- ถ้า $k > 0$ จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟ จะอยู่ ____ แกน X
- ถ้า $k > 0$ จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟ จะอยู่ ____ แกน X

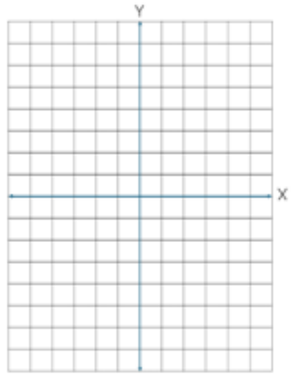
4. กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = ax^2$ โดย

- ถ้า $k > 0$ กราฟของสมการ $y = ax^2$ จะเลื่อนขนานตามแนวแกน Y ขึ้นไป เป็นระยะ _ หน่วย
- ถ้า $k < 0$ กราฟของสมการ $y = ax^2$ จะเลื่อนขนานตามแนวแกน Y ลงมา เป็นระยะ _ หน่วย

แบบฝึกหัด 4 : กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$
หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง
รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค23101 ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

1) $y = 5x^2 + 4$



2) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

3) $y = -3x^2 - 2$

4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

แบบฝึกหัด 4

เรื่อง กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

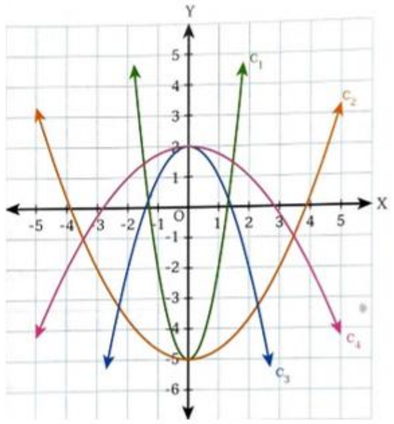
2. จงพิจารณาว่า พาราโบลา c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นกราฟของสมการใดต่อไปนี้

_____1) $y = 3x^2 - 5$

_____2) $y = -x^2 + 2$

_____3) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$

_____4) $y = \frac{1}{3}x^2 - 5$



3. พิจารณากราฟของพาราโบลาที่ผ่านจุด (-2, 8), (0, 0) และ (1, 2) ดังรูป แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1) กราฟที่กำหนดให้มีสมการเป็นอย่างไร

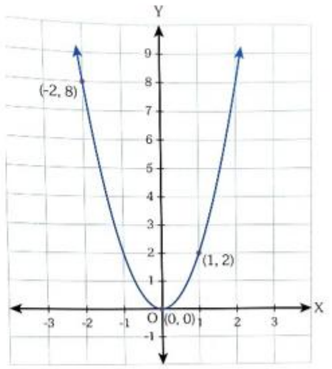
ตอบ_____

2) ถ้าเลื่อนขนานกราฟที่กำหนดให้ตามแนวแกน Y ขึ้นไป 3 หน่วย แล้วกราฟที่ได้จะมีสมการเป็นอย่างไร

ตอบ_____

3) ถ้าเลื่อนขนานกราฟที่กำหนดให้ตามแนวแกน Y ลงมา 5 หน่วย แล้วกราฟที่ได้จะมีสมการเป็นอย่างไร

ตอบ_____



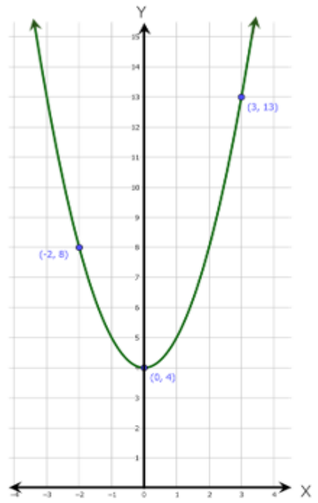
แบบฝึกหัด 4

<u>เรื่อง</u> กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

4. จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

ในการหาสมการของพาราโบลาที่ผ่านจุด (-2, 8), (0, 4) และ (3, 13) ดังรูป



พิจารณาจากกราฟของพาราโบลาที่กำหนดให้ จะได้ว่า สมการของพาราโบลาอยู่ในรูป

$y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$ ซึ่งมีจุดต่ำสุดของกราฟ คือ _____

นั่นคือต้องการหาค่า a และ k

<u>พิจารณาการหาค่า k</u>

เนื่องจาก จุด _____เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ ดังนั้น k = _____

ดังนั้น สมการของพาราโบลาอยู่ในรูป $y = ax^2 +$ _____ —①

<u>พิจารณาการหาค่า a</u>

เมื่อแทน x และ y ด้วยพิกัดที่หนึ่งและพิกัดที่สองของจุดที่กราฟผ่านลงในสมการ ① จะสามารถหาค่า a ได้

แทน (x, y) ด้วย _____ใน ① จะได้ ____ = _____

a = _____

แบบฝึกหัด 4

<u>เรื่อง</u> กราฟของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

สามารถดาวน์โหลดได้ที่ www.dltv.ac.th

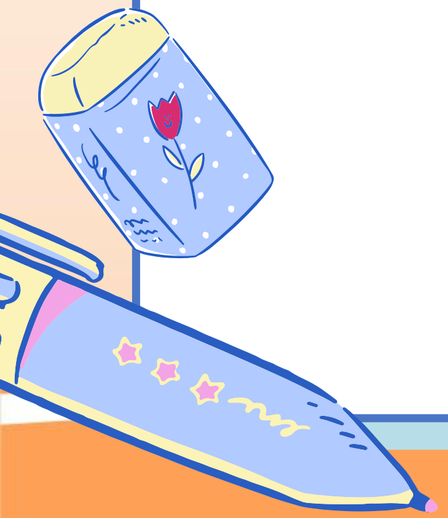
สรุป... กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ มีลักษณะดังนี้

1. กราฟเป็นพาราโบลาที่เป็นรูปสมมาตร โดยมีแกน Y (เส้นตรง x = 0) เป็นแกนสมมาตร

- ถ้า a > 0 กราฟมีลักษณะเป็นพาราโบลาหงาย มีจุดต่ำสุด แต่ไม่มีจุดสูงสุด
- ถ้า a < 0 กราฟมีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำ มีจุดสูงสุด แต่ไม่มีจุดต่ำสุด

2. กราฟจะบานน้อยหรือมาก ขึ้นอยู่กับค่า a กล่าวคือ

- ถ้า |a| มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ กราฟจะบานมากขึ้นเรื่อย ๆ ในทางกลับกัน
- ถ้า |a| มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ กราฟจะบานน้อยลงเรื่อย ๆ



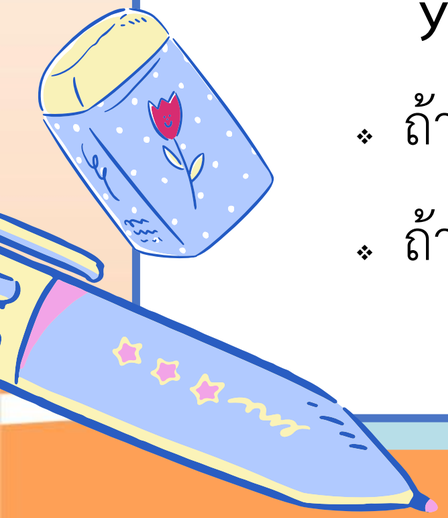
สรุป... กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$ มีลักษณะดังนี้

3. จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟอยู่ที่จุด (0, k) ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ y เท่ากับ k

- ถ้า $k > 0$ จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟ จะอยู่เหนือแกน X
- ถ้า $k < 0$ จุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของกราฟ จะอยู่ใต้แกน X

4. กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = ax^2$ โดย

- ถ้า $k > 0$ กราฟของสมการ $y = ax^2$ จะเลื่อนขนานตามแนวแกน Y ขึ้นไป เป็นระยะ k หน่วย
- ถ้า $k < 0$ กราฟของสมการ $y = ax^2$ จะเลื่อนขนานตามแนวแกน Y ลงมา เป็นระยะ $|k|$ หน่วย

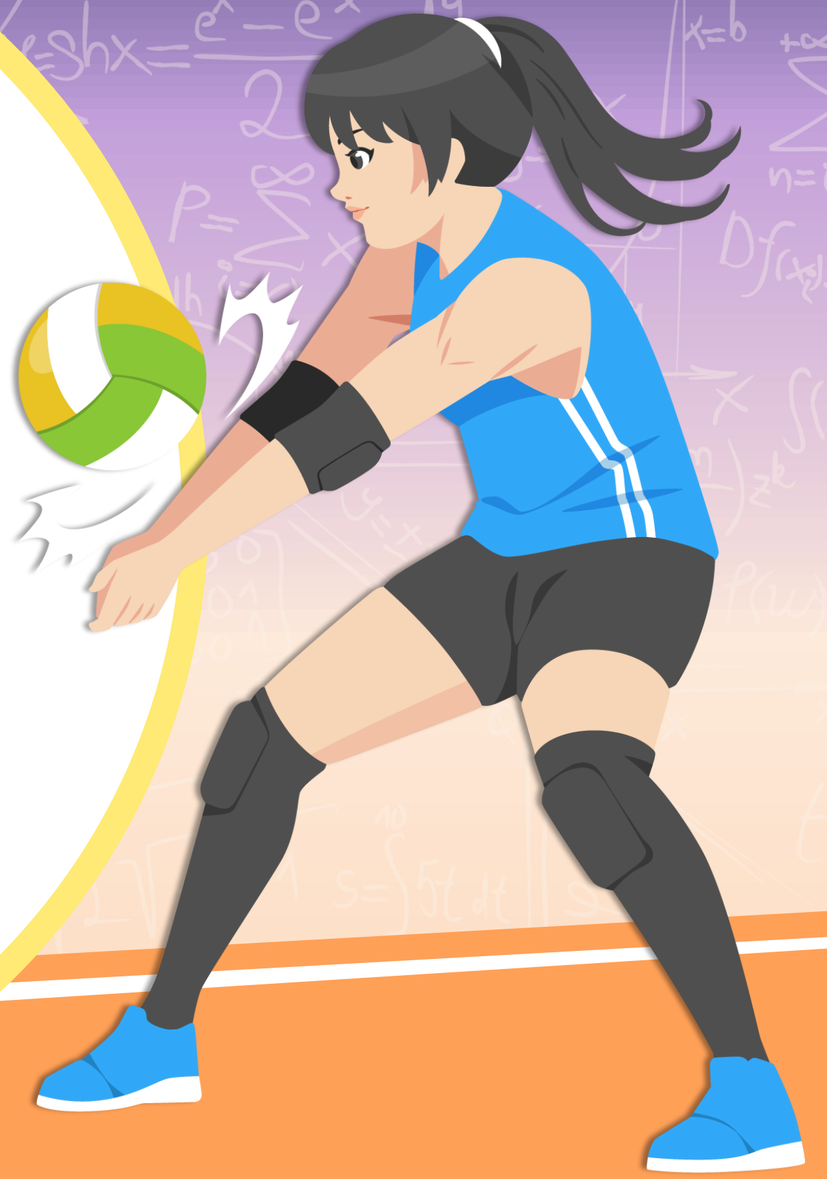


บทเรียนครั้งต่อไป

เรื่อง พาราโบลาที่กำหนด

ด้วยสมการ $y = a(x - h)^2 + k$

เมื่อ $a \neq 0$



ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่ www.dltv.ac.th

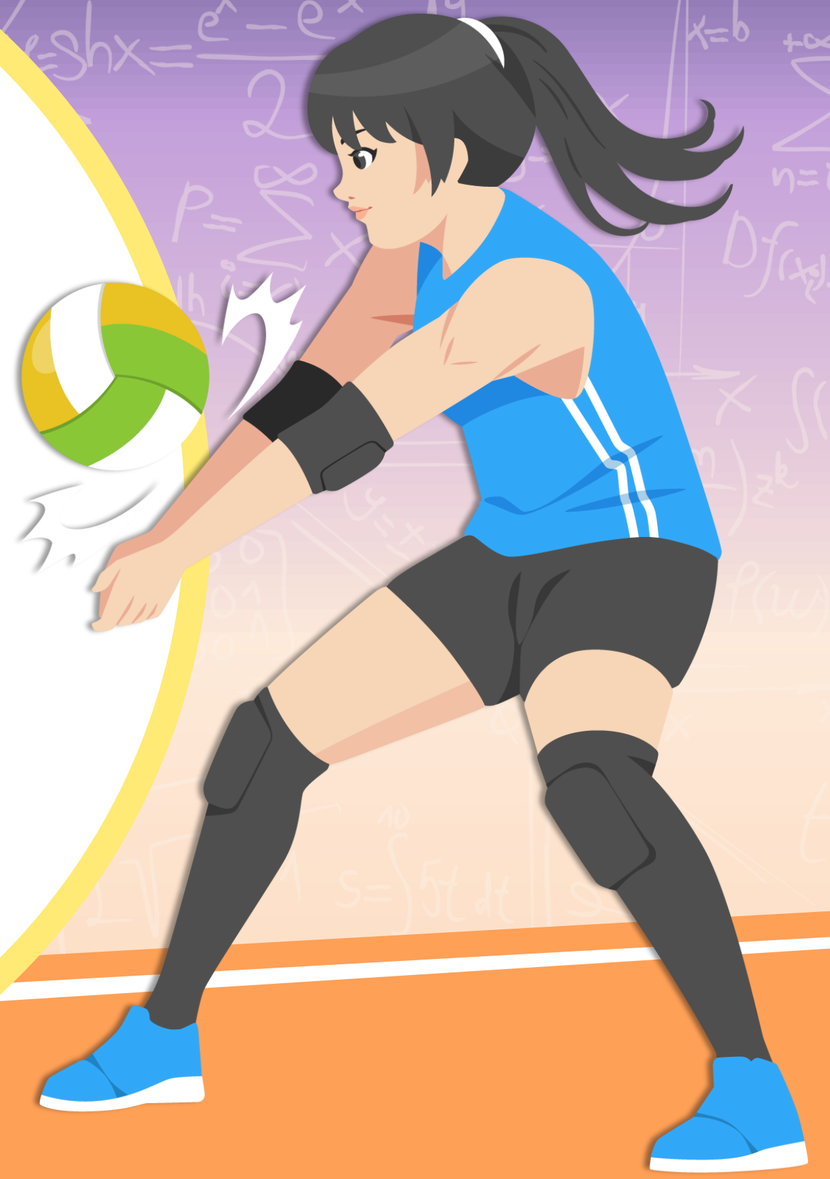
สิ่งที่โรงเรียนปลายทางต้องเตรียม

- **ใบกิจกรรม 5 :** สำรวจกราฟของ

$y = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

- **แบบฝึกหัด 6 :** กราฟของ

$y = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$



ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่ www.dltv.ac.th