

# รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค22102

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

เรื่อง เส้นขนานกับมุมนี้ที่ซ่อนอยู่ (3)

ครูผู้สอน ครุณรงค์นุช สุกใส

ครูณัฐนรี จารุศุภกร





เส้นขนานกับมุมนี้ที่ซ่อนอยู่ (3)

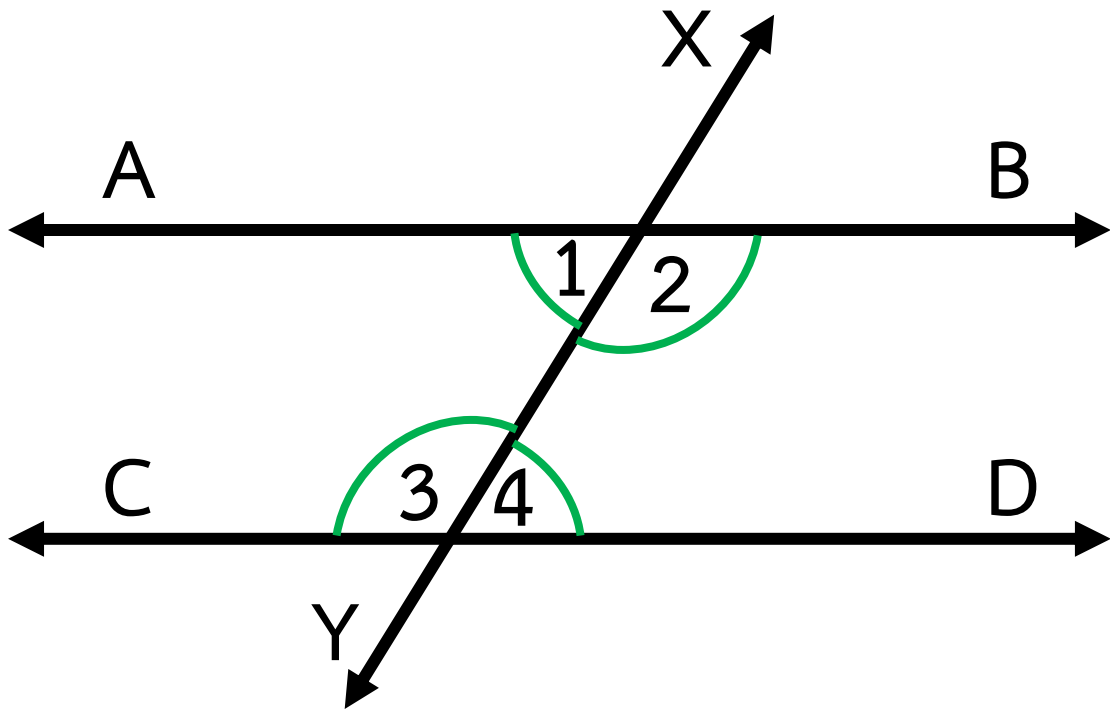
# จุดประสงค์การเรียนรู้

## นักเรียนสามารถ

1. ตรวจสอบความขนานกันของเส้นตรงสองเส้นโดยใช้ระยะห่างระหว่างเส้นตรงหรือทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้ง
2. อธิบายเกี่ยวกับมุมแย้ง
3. ใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดและทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้งในการแก้ปัญหา



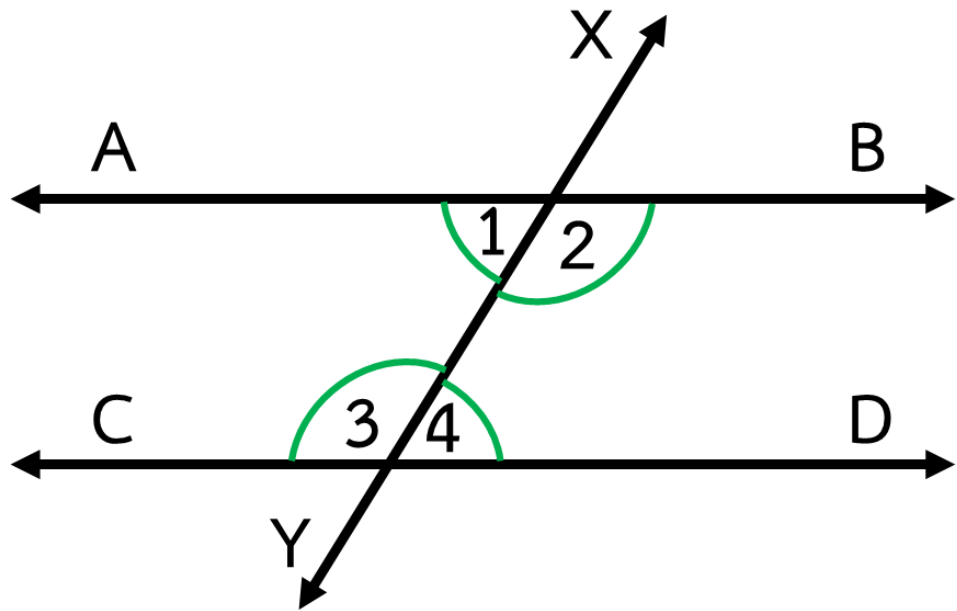
? ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วขนาดของมุม  
ภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับกี่องศา



180 องศา



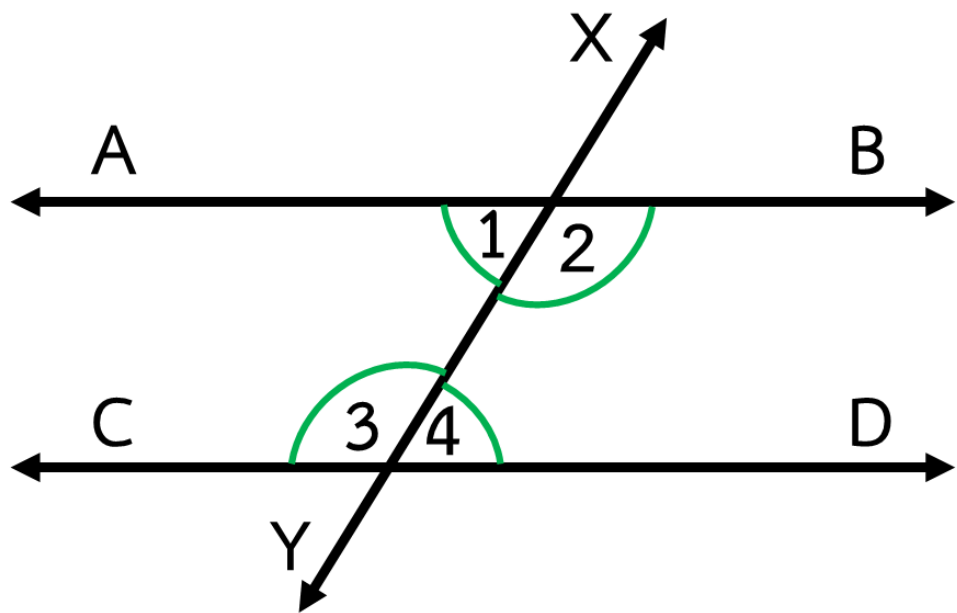
? จากรูป เราทราบได้อย่างไรว่า  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  ขนานกันหรือไม่



- ถ้าต่อ  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  ออกไป  
แล้วเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกัน  
แล้ว  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



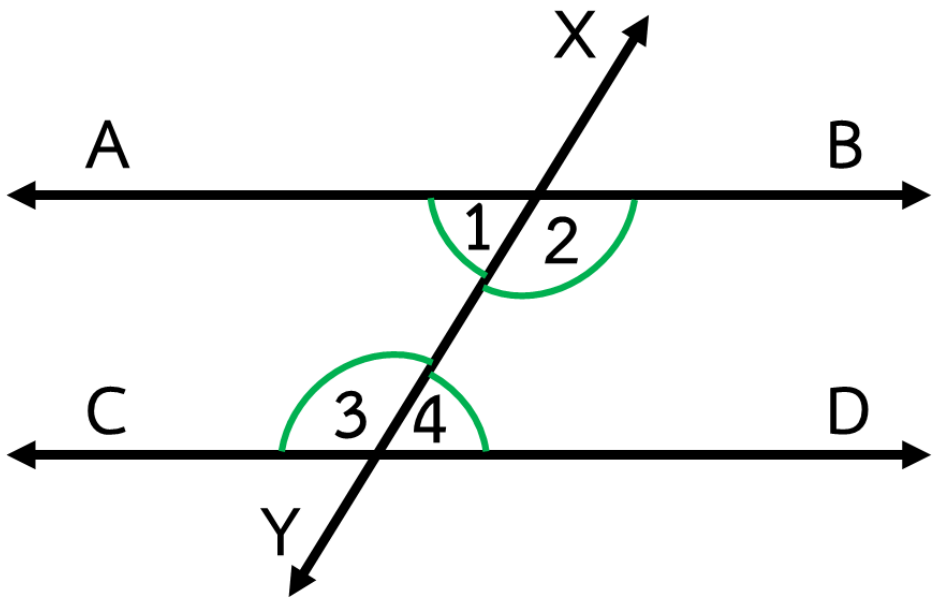
? จากรูป เราทราบได้อย่างไรว่า  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  ขนานกันหรือไม่



- ถ้า  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  มีระยะห่าง  
ระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอ  
แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



? จากรูป เราทราบได้อย่างไรว่า  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  ขนานกันหรือไม่

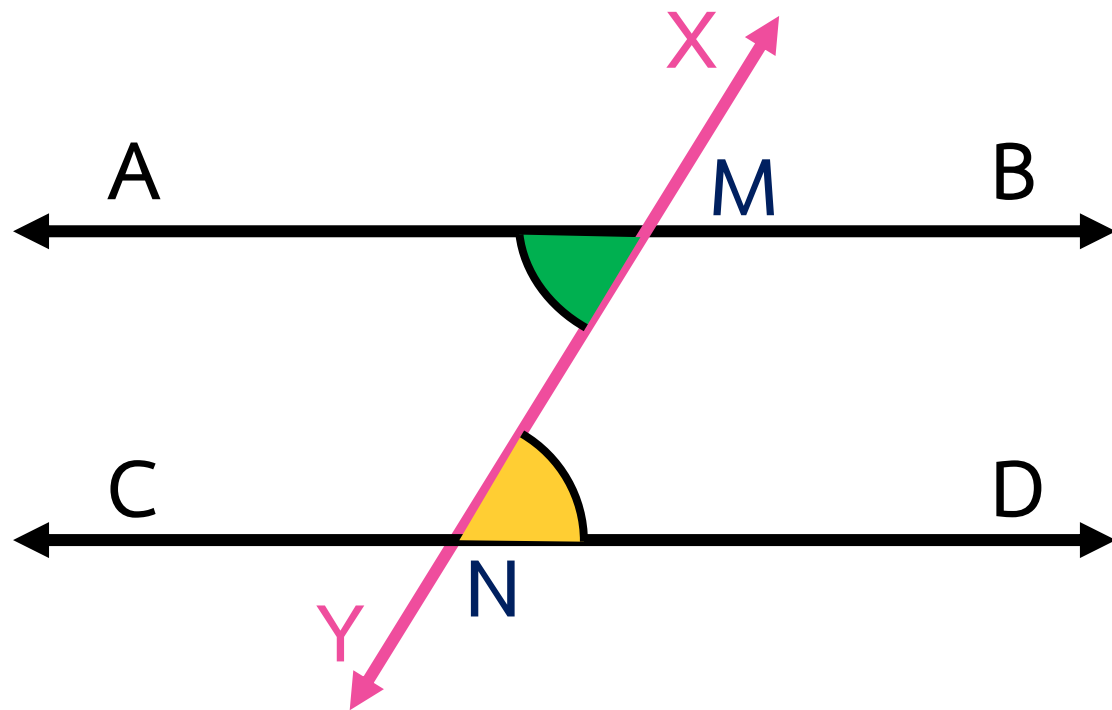


- ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง  
ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้าง  
เดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180  
องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

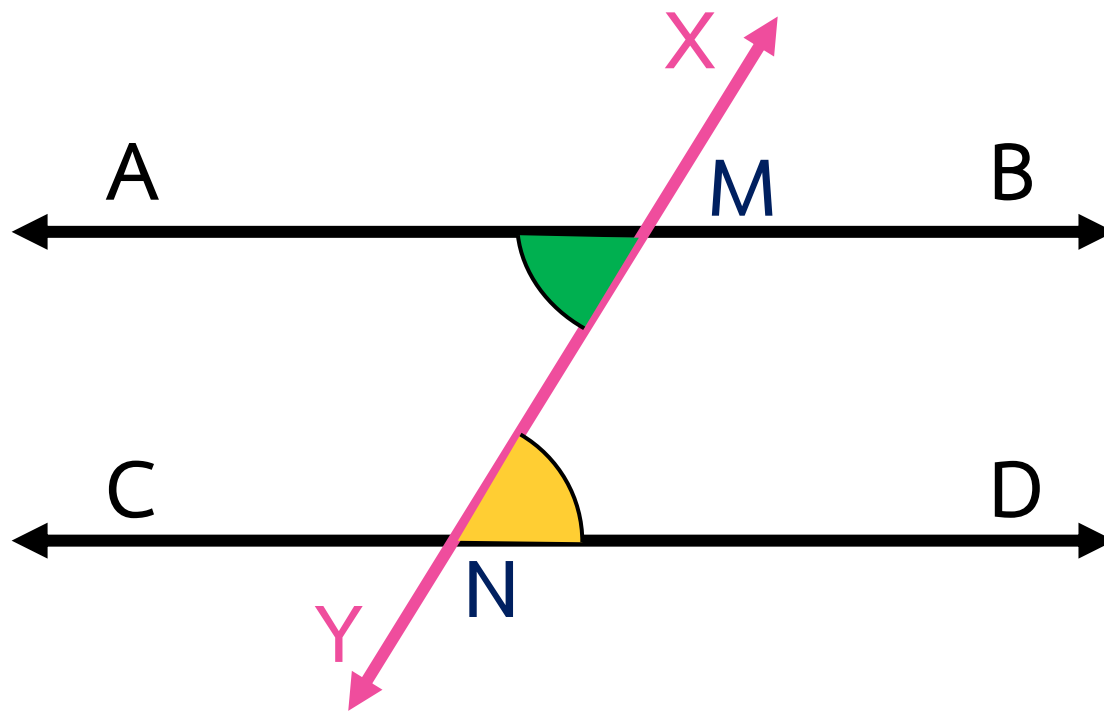




$\widehat{AMN}$  และ  $\widehat{MND}$

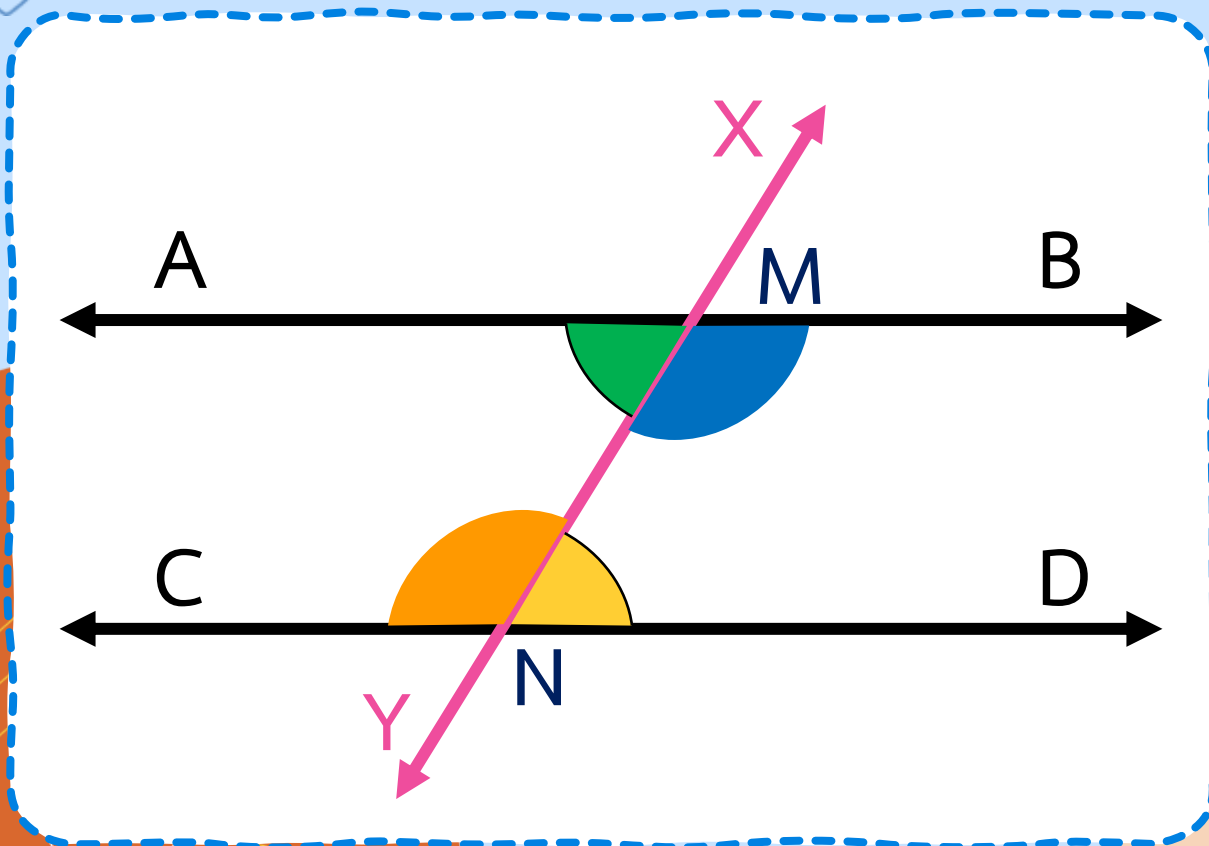






มุมสลับซ้ายและมุมสลับขวาเป็นมุมแย้งกัน

ให้นักเรียนสังเกตว่า มีมุมคู่ใดอีกบ้าง ที่เป็นมุมแย้งกัน



จะพบว่า  $\widehat{BMN}$  และ  $\widehat{CNM}$  เป็นมุมแย้งกันด้วย





กิจกรรม 2 :  
มุมแย้งบอกได้





## ใบกิจกรรม 2 : มุมแย้งบอกได้

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเขียนเส้นตัด  $XY$  ตัด  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  โดยให้จุด  $M$  และจุด  $N$  เป็นจุดตัดบน  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  ตามลำดับ จากนั้น วัดขนาดของมุมแย้ง แล้วเติมคำตอบลงในตารางให้สมบูรณ์

1.



มุมแย้ง	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1	$\widehat{AMN}$	
	$\widehat{DNM}$	
คู่ที่ 2	$\widehat{BMN}$	
	$\widehat{CNM}$	

2.



มุมแย้ง	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1	$\widehat{AMN}$	
	$\widehat{DNM}$	
คู่ที่ 2	$\widehat{BMN}$	
	$\widehat{CNM}$	

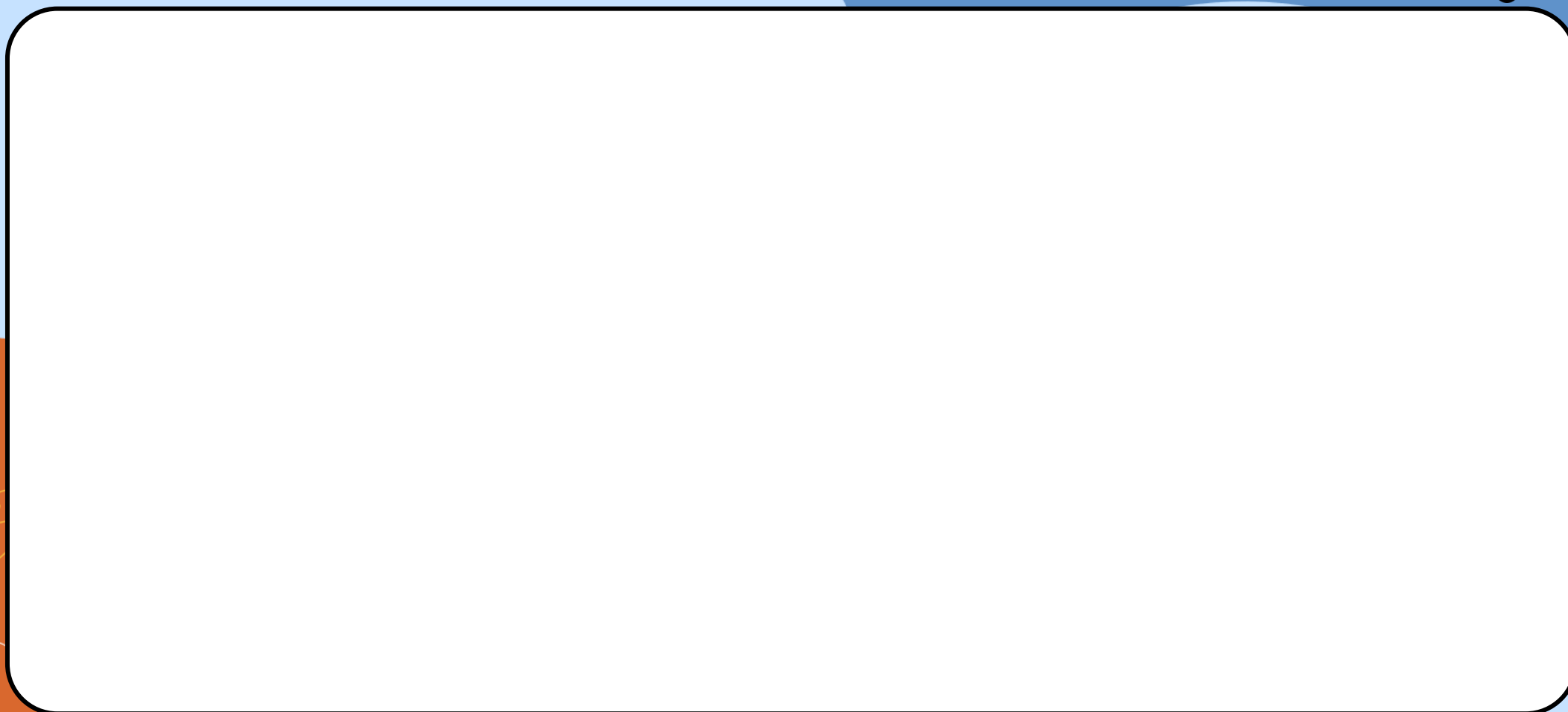
# กิจกรรม 2 :

## มุมแย้งบอกได้



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th))

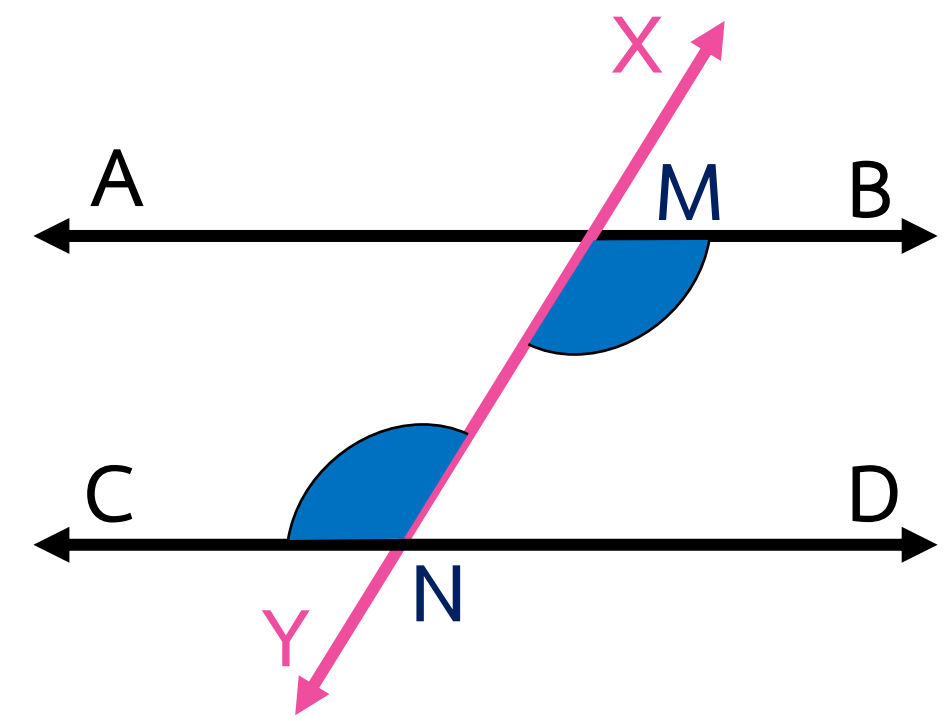
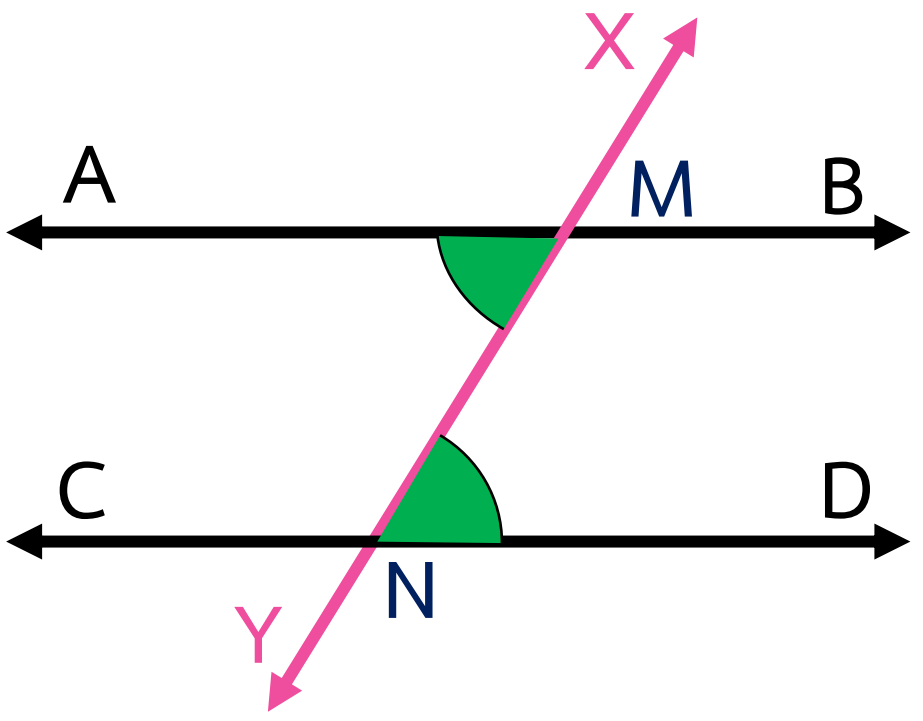
## กิจกรรม 2 : มุมแย้งบอกได้



## สรุปผลที่ได้จากการทำกิจกรรม

พบว่า ถ้า  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  ไม่ขนานกัน ขนาดของมุมแย้งจะไม่เท่ากัน

แต่หาก  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  ขนานกัน ขนาดของมุมแย้งจะเท่ากันเป็นคู่ ๆ



ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้ง

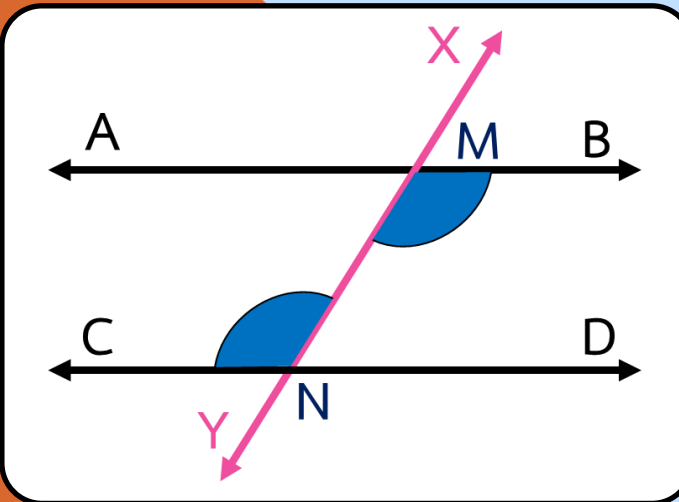
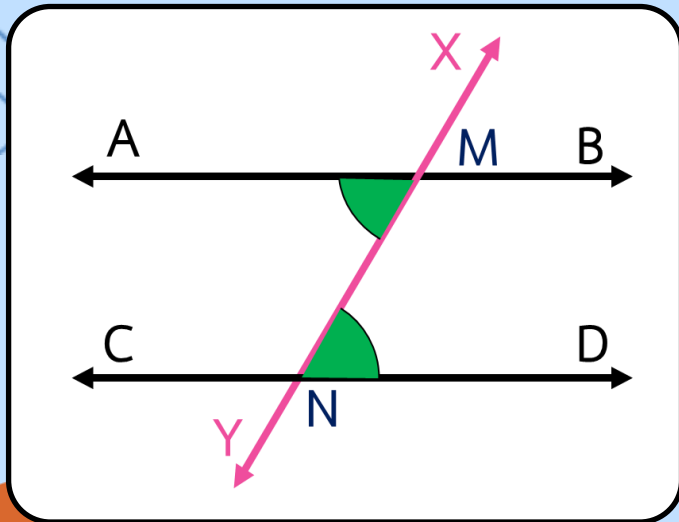


ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและ  
มีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน





# ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้ง



ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน  
และมีเส้นตัดแล้วมุมแย้ง  
มีขนาดเท่ากัน





แบบฝึกหัด 2 :  
เส้นขนานและมุมแย้ง



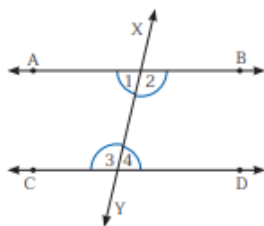


## แบบฝึกหัด 2 : เส้นขนานและมุมแย้ง

ชื่อ-สกุล ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่ .....

ชื่อ-สกุล ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่ .....

**ทฤษฎีบท** เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่ขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

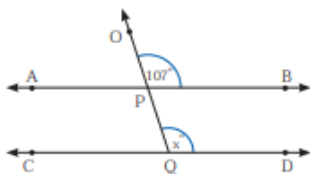


กำหนดให้  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
จะได้  $\hat{1} = \hat{4}$  และ  $\hat{2} = \hat{3}$

### ตอนที่ 1

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทำให้สมบูรณ์

1. จากรูป  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  จงหาค่าของ x



วิธีทำ .....

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

# แบบฝึกหัด 2 :

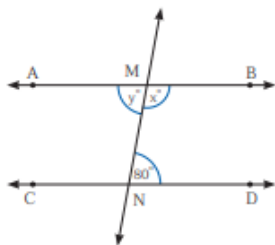
## เส้นขนานและมุมแย้ง



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th))

หน่วยการเรียนรู้ที่ 10 เส้นนี้ที่คู่กัน

2. จากรูป  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  จงหาค่าของ  $x - y$



วิธีทำ.....

.....

.....

.....

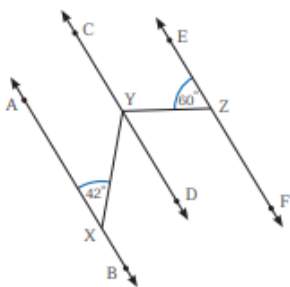
.....

.....

.....

.....

3. จากรูป  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  และ  $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$  จงหาขนาดของ  $\angle XYZ$



วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



# แบบฝึกหัด 2 :

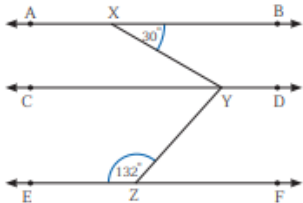
## เส้นขนานและมุมแย้ง



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th))

หน่วยการเรียนรู้ที่ 10 เส้นที่คู่กัน

4. จากรูป  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  และ  $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$  จงหาขนาดของ  $\widehat{XYZ}$



วิธีทำ.....

.....

.....

.....

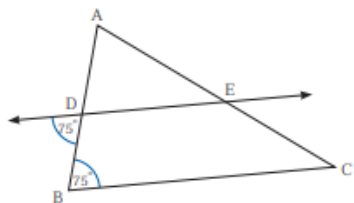
.....

.....

ทำให้อลอง

จากรูปที่กำหนดให้ จงแสดงว่าเส้นตรง รั้งสี หรือส่วนของเส้นตรงคู่ใดขนานกัน

1)



วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....



## แบบฝึกหัด 2 :

# เส้นขนานและมุมแย้ง



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th))

# แบบฝึกหัด 2 :

## เส้นขนานและมุมแย้ง



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th))

หน่วยการเรียนรู้ที่ 10 เส้นที่คู่กัน

ทำให้อลอง

2)



วิธีทำ

.....

.....

.....

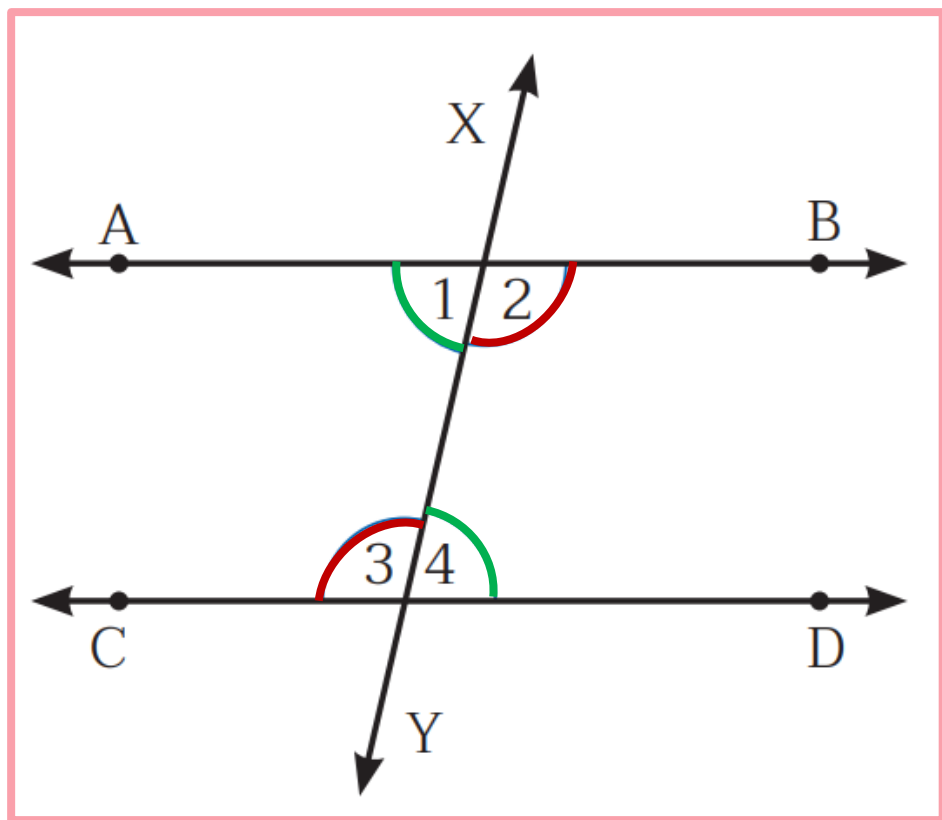
.....

.....

.....

.....

**ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



กำหนดให้  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

จะได้  $\hat{1} = \hat{4}$  และ

$\hat{2} = \hat{3}$





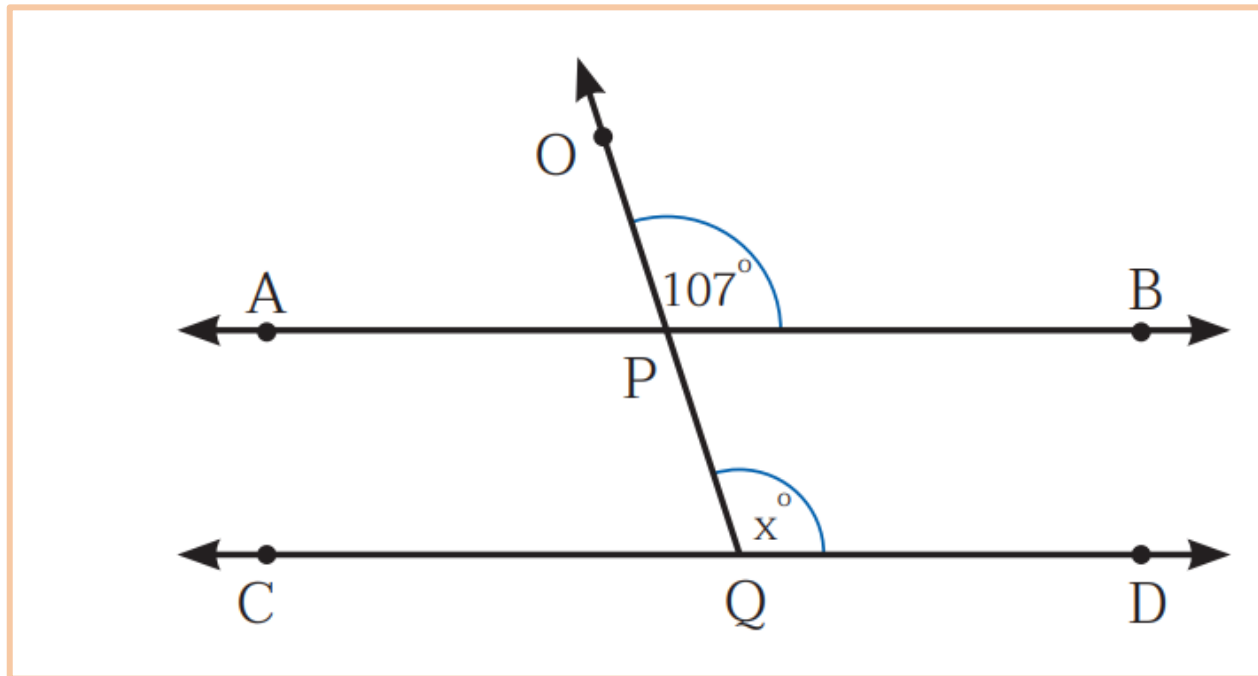
## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

### ตอนที่ 1



คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

1. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  จงหาค่าของ  $x$





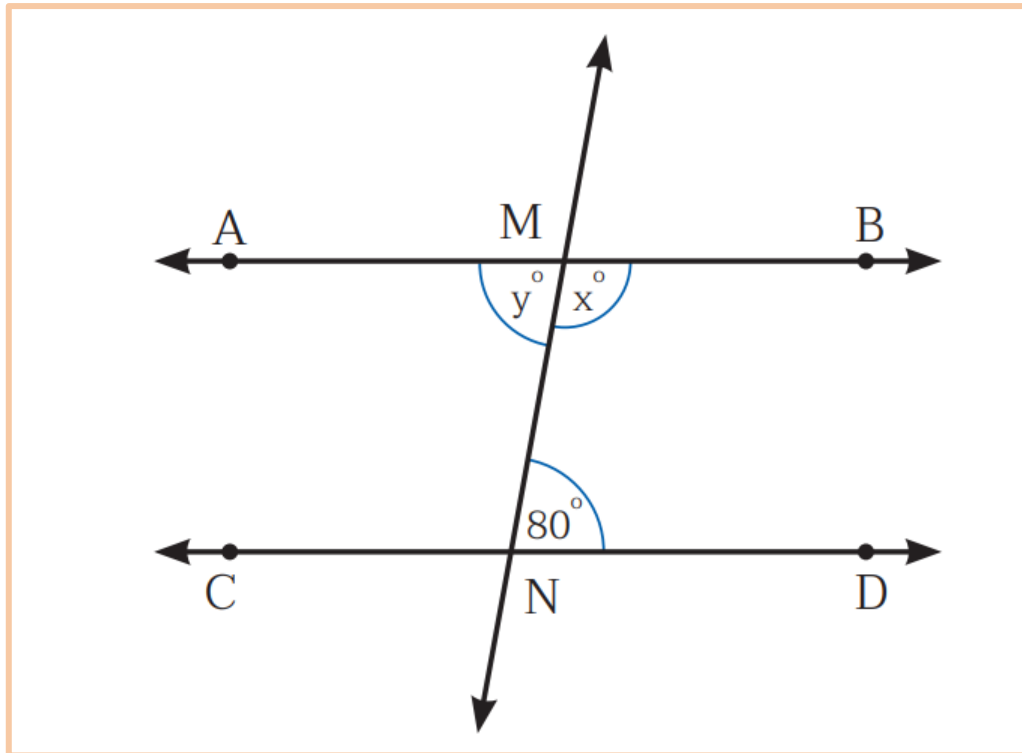


ตอนที่ 1



คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

2. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  จงหาค่าของ  $x - y$





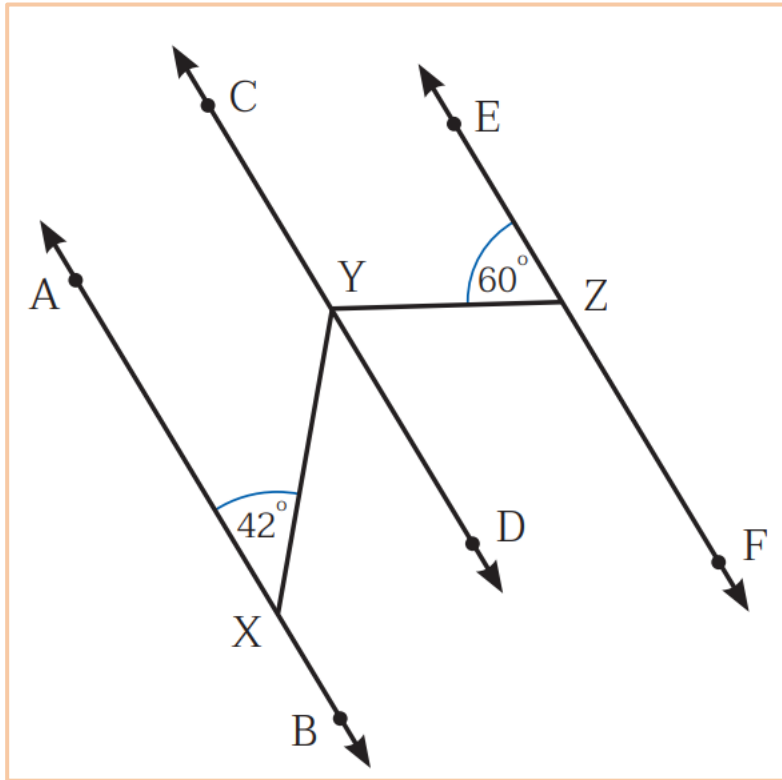
## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

### ตอนที่ 1



คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

3. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  และ  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$  จงหาขนาดของ  $\hat{X}YZ$





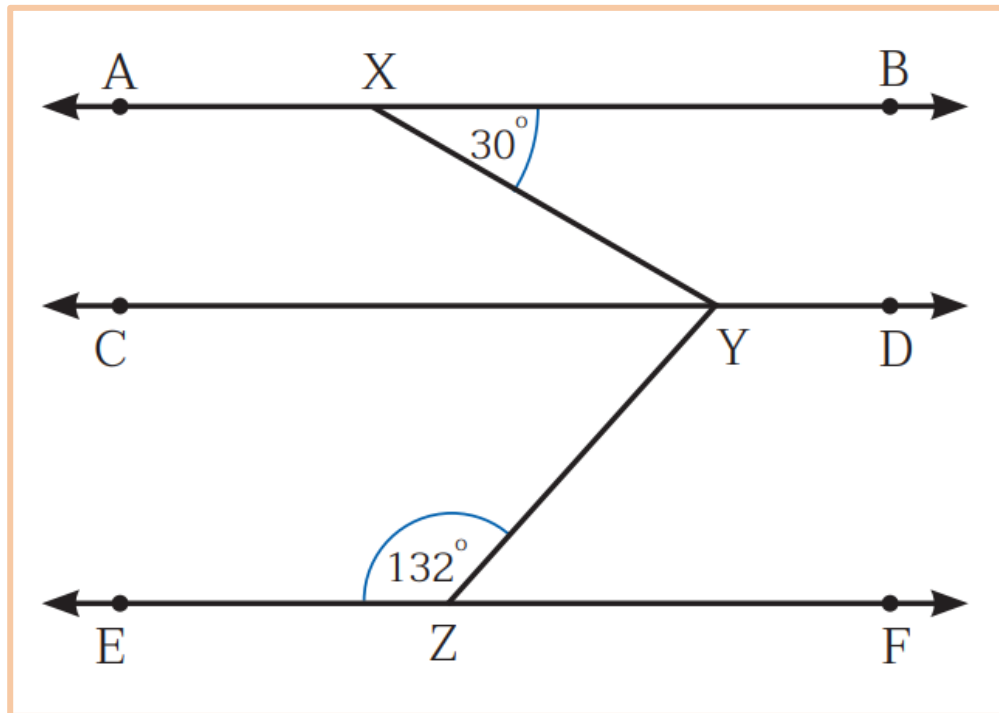
## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

### ตอนที่ 1



**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิดเพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการทราบให้สมบูรณ์

4. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  และ  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$  จงหาขนาดของ  $\widehat{XYZ}$



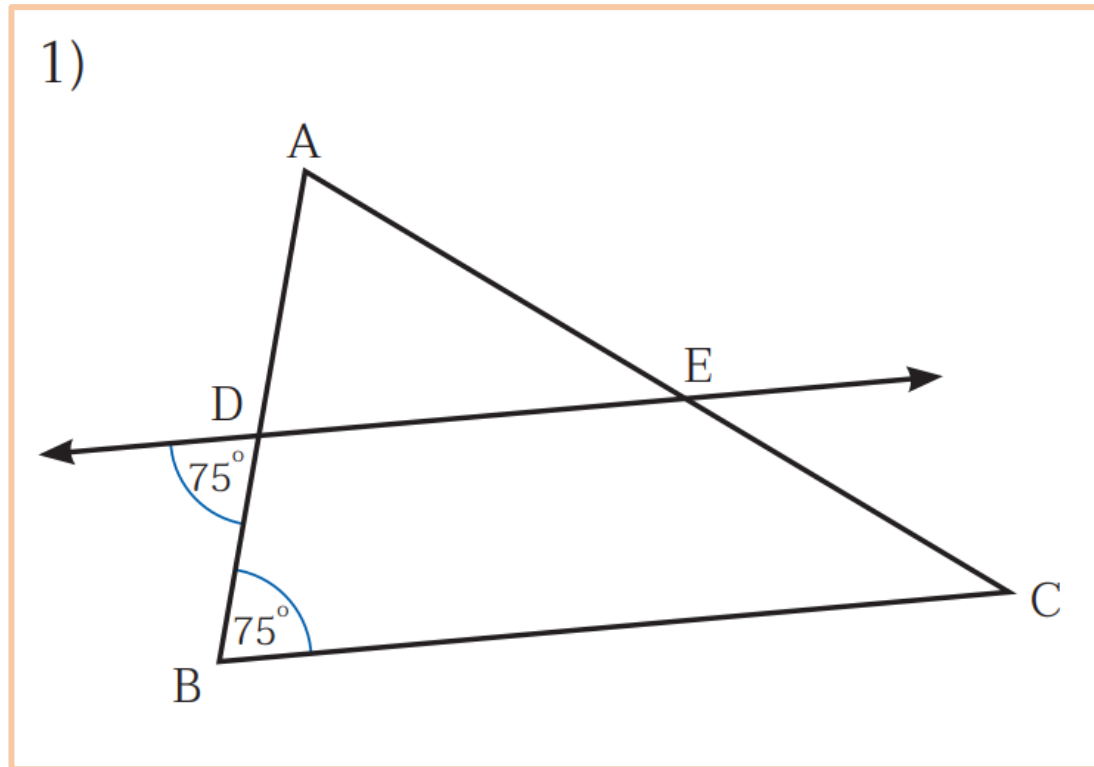


## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

ทำให้ลอง



**คำชี้แจง** จากรูปที่กำหนดให้ จงแสดงว่าเส้นตรง รังสี หรือ ส่วนของเส้นตรงคู่ใดขนานกัน





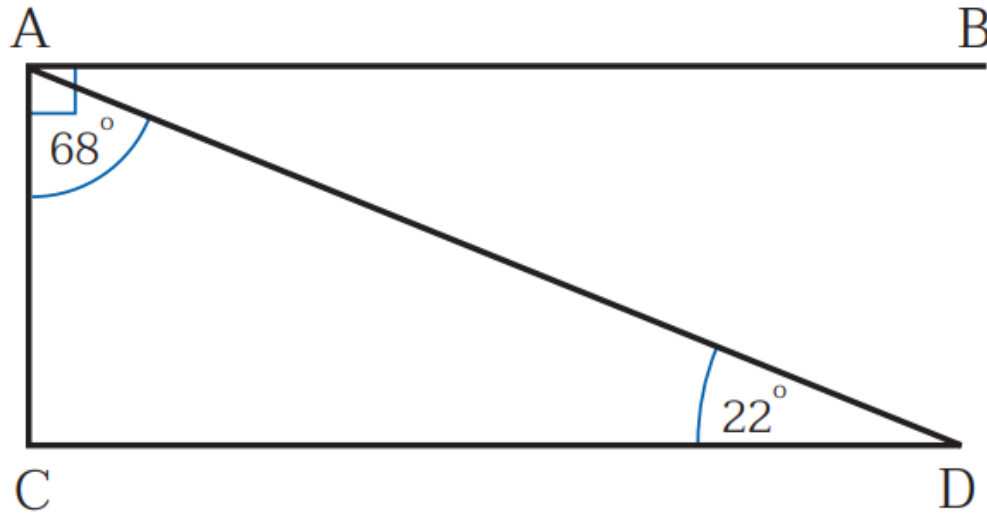
## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

ทำให้ลอง



**คำชี้แจง** จากรูปที่กำหนดให้ จงแสดงว่าเส้นตรง รังสี หรือ ส่วนของเส้นตรงคู่ใดขนานกัน

2)

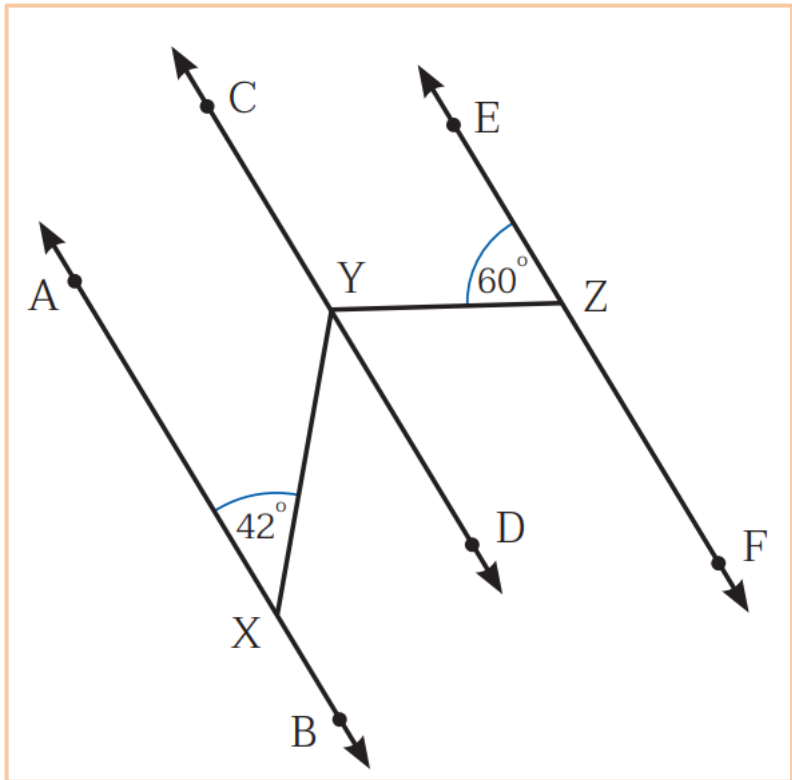


ตอนที่ 1



แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

3. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  และ  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$  จงหาขนาดของ  $\widehat{XYZ}$



วิธีทำ... เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

จะได้  $\widehat{XYD} = 42^\circ$

เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

จะได้  $\widehat{DYZ} = 60^\circ$

เนื่องจาก  $\widehat{XYZ} = \widehat{XYD} + \widehat{DYZ}$

จะได้  $\widehat{XYZ} = 42 + 60$

ดังนั้น  $\widehat{XYZ} = 102$  องศา



เฉลยแบบฝึกหัด 2  
เส้นขนานและมุมแย้ง



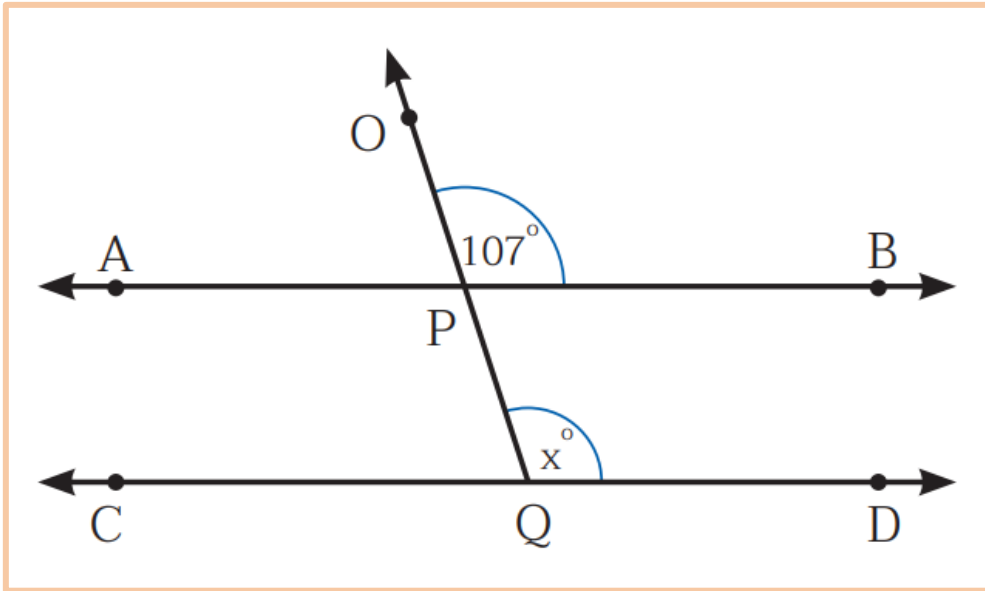


## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

### ตอนที่ 1



1. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  จงหาค่าของ  $x$



วิธีทำ.....

.....เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{OQ}$  ตัดกับ  $\overleftrightarrow{AB}$  ที่จุด  $P$ .....

.....จะได้  $\hat{A}PQ = 107^\circ$ .....

.....เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ .....

.....จะได้  $\hat{A}PQ = \hat{P}QD$ .....

.....ดังนั้น  $x = 107$ .....

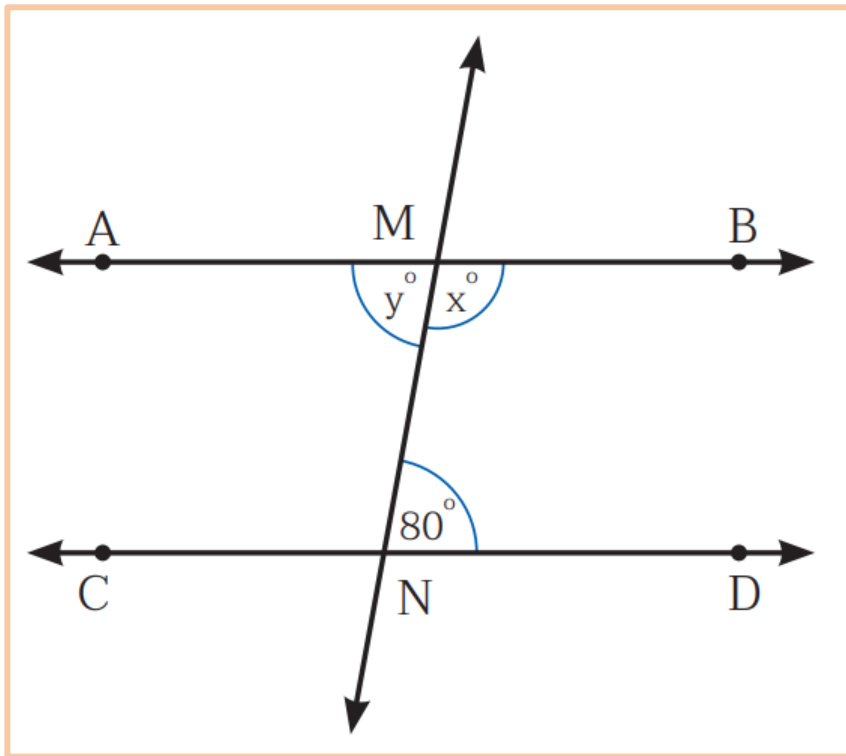


ตอนที่ 1



แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

2. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  จงหาค่าของ  $x - y$



วิธีทำ ..... เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  .....

จะได้  $\widehat{AMN} = \widehat{MND}$  .....

ดังนั้น  $y = 80$  .....

และเนื่องจาก  $\widehat{AMN} + \widehat{BMN} = 180^\circ$  .....

จะได้  $x = 180 - 80 = 100$  .....

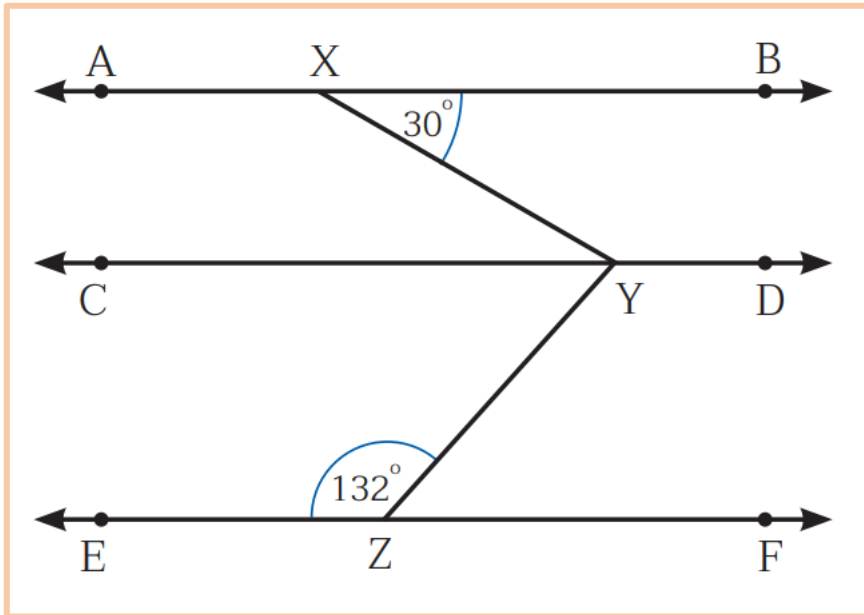
ดังนั้น  $x - y = 100 - 80 = 20$  .....

ตอนที่ 1



แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

4. จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  และ  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$  จงหาขนาดของ  $\widehat{XYZ}$



วิธีทำ... เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

จะได้  $\widehat{XYC} = 30^\circ$

เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

จะได้  $\widehat{CZY} = 180 - 132 = 48^\circ$

เนื่องจาก  $\widehat{XYZ} = \widehat{XYC} + \widehat{CZY}$

จะได้  $\widehat{XYZ} = 30 + 48$

ดังนั้น  $\widehat{XYZ} = 78$  องศา

การตรวจสอบว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกันหรือไม่นั้น  
นอกจากตรวจสอบจากระยะห่างระหว่างเส้นตรง  
ทั้งสองเส้น และผลรวมของขนาดของมุมภายในที่อยู่  
บนข้างเดียวกันของเส้นตัดแล้ว ยังสามารถตรวจสอบ  
ได้โดยการพิจารณาขนาดของมุมแย้งตามทฤษฎีบท



# ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้ง



ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง  
ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้ว  
เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

# ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้ง

- 📍 ทฤษฎีบทข้างต้นนี้เป็นบทกลับของทฤษฎีบทที่ว่า  
“ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด  
แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน”

# ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้ง



และเมื่อเขียนทฤษฎีบททั้งสองใหม่โดยใช้  
“**ก็ต่อเมื่อ**” จะได้ทฤษฎีบท ดังนี้

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง  
เส้นตรงคู่ขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้ง  
มีขนาดเท่ากัน



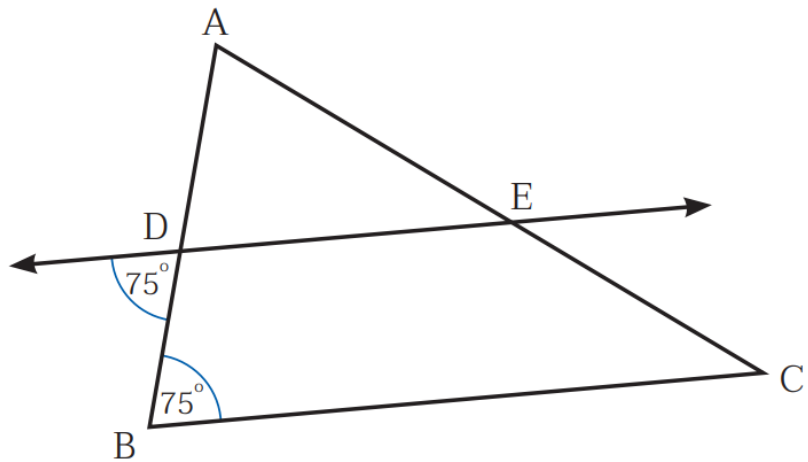
## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

ทำให้ลอง



**คำชี้แจง** จากรูปที่กำหนดให้จงแสดงว่าเส้นตรง รังสี หรือส่วนของเส้นตรง คู่ใดขนานกัน

1)



วิธีทำ..... เนื่องจาก  $\overleftrightarrow{DE}$  และ  $\overline{BC}$  .....

มี  $\overline{AB}$  เป็นเส้นตัด .....

ทำให้ได้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน .....

คือ 75 องศา .....

ดังนั้น  $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$  .....



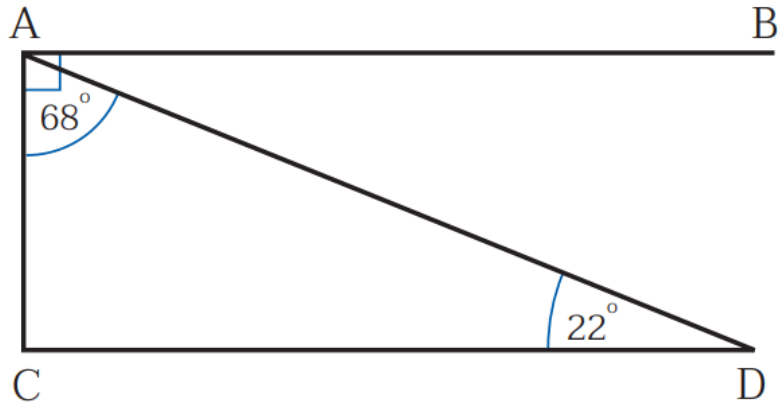
## แบบฝึกหัด 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

ทำให้ลอง



**คำชี้แจง** จากรูปที่กำหนดให้จงแสดงว่าเส้นตรง  $\overline{AB}$  หรือส่วนของเส้นตรง  $\overline{AD}$  ขนานกัน

2)



วิธีทำ..... เนื่องจาก  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$ .....

..... มี  $\overline{AD}$  เป็นเส้นตัด.....

..... และ  $\widehat{BAD} = 90 - 68$ .....

..... =  $22$  องศา.....

..... เนื่องจาก  $\widehat{BAD}$  และ  $\widehat{ADC}$ .....

..... เป็นมุมแย้งกัน จึงมีขนาดเท่ากัน.....

..... ดังนั้น  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .....



# สรุปความรู้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้ง  
เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง  
เส้นตรงคู่ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้ง  
มีขนาดเท่ากัน





# บทเรียนครั้งต่อไป

## เรื่อง

เส้นขนานกับมุมนี้ที่คู่กัน (1)



# สิ่งที่ต้องเตรียม

**แบบฝึกหัด 3** : เส้นขนานและมุมภายนอก  
กับมุมภายใน



(สามารถดาวน์โหลดได้ที่ [www.dltv.ac.th](http://www.dltv.ac.th))